INHALTSVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG

In unseren Kursen Wirtschaftsmathematik und Statistik I, II und III wird das Grundlagenwissen aus Wirtschaftsmathematik und Statistik vermittelt, das es zum erfolgreichen Absolvieren der folgenden Studien / Ausbildungen braucht: **AZEK, Bankfach, CFA, Controller, Fachhochschule, Finanzplaner, MBA, NDS Bankfach, NDS Corporate Finance, NDS Financial Consultant, Pensionskassenexperte, Swiss Banking School, Treuhänder, Versicherungsfach** oder **Wirtschaftsprüfer**. Unser modularer Kursaufbau erlaubt es, sich je nach Vorkenntnissen und Anforderungen ein individuelles Programm zusammenzustellen. Aus Erfahrung wissen wir, dass das gründliche Erlernen der Mathematik Zeit braucht. Unsere Kurse finden deshalb über eine Dauer von 15 bis 17 Wochen statt, und der Inhalt ist eng umrissen.

Dieses Skript wurde spezifisch für den Wirtschaftsmathematik und Statistik I (kurz: WMS I) - Kurs geschrieben. Die Inhaltsschwerpunkte sind:

1) Algebraische Termumformungen (also „Rechnen mit Buchstaben").

2) Das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

3) Einführung in die Funktionenlehre.

In diesem Kurs werden die Grundlagen und das Grundwerkzeug der Mathematik unterrichtet. Da die Mathematik aufbauend strukturiert ist, bildet das Beherrschen dieser Grundlagen eine solide Basis für die weiterführende Mathematik, wie etwa die Analysis und die Statistik (siehe WMS II & WMS III).

Dieses Theorieskript beinhaltet Rechenregeln, Lösungsverfahren, Herleitungen und Anwendungen für Lösungsformeln sowie auch Musterbeispiele. Weiterführende Ergänzungen oder Beweise sind im Anhang ab der Seite 163 zu finden.

Zusätzliche Übungsaufgaben und die Lösungen dazu befinden sich im Übungsskript.

An dieser Stelle bleibt nur noch die Bedeutung der in diesem Skript vorkommenden Symbole zu erläutern:

Bedeutung der Symbole die den Text begleiten:

ⓘ **HINWEIS:** Dieses Symbol hebt Definitionen, wichtige Bemerkungen, sowie wichtige Ergebnisse hervor.

✎ **AUFGABE:** Dieses Zeichen fordert zur selbständigen Bearbeitung einer Aufgabe auf.

Luca Turi, Januar 2004.

2 GRUNDLAGEN

2.1 Die vier Grundoperationen (= Grundrechenarten)

2.1.1 Die Addition

Bestandteile:

Summand **+** Summand = Summe

Beispiel:

5 + 3 = 8

2.1.2 Die Subtraktion

Bestandteile:

Minuend **–** Subtrahend = Differenz

Beispiel:

8 – 5 = 3

2.1.3 Die Multiplikation

Bestandteile:

1.Faktor **•** 2.Faktor = Produkt

Beispiel:

2 **•** 4 = 8

2.1.4 Die Division

Bestandteile:

Dividend **:** Divisor = Quotient

Beispiel:

8 **:** 2 = 4

2.1.5 Operationszeichen / Vorzeichen

Die **Operation** (=Rechenart) wird bestimmt durch das **Operationszeichen**. Das **Vorzeichen** gibt an, ob die Zahl **positiv** oder **negativ** ist.

(+ 4)	+	(– 3)	Für das Zusammentreffen	+ (+)	=	+
			von Vorzeichen und	(+) –	=	–
Vorzeichen		Vorzeichen	Operationszeichen gilt	– (+)	=	–
	Operationszeichen		folgende **Regel**:	– (–)	=	+

Vor allem die vierte Regel „– (–) = +“ sollte man sich gut einprägen!

Ein Beispiel dazu: 3 – (– 4) = 3 **+** 4 = +7 = 7.

Bemerkung: Positive Vorzeichen (etwa +7) sind unüblich. Man braucht positive Vorzeichen höchstens dann, wenn man *hervorheben* möchte, dass es sich um eine *positive* Zahl handelt.

2.2 Mathematisches Werkzeug & Repetition des Zahlenrechnens

2.2.1 Primzahlen

Eine natürliche Zahl die nur durch 1 oder durch sich selbst teilbar ist, wird als **Primzahl** bezeichnet. Ausnahme: Die Zahl „1" wird nicht als Primzahl definiert. Die kleinste Primzahl ist somit die Zahl 2. Dies ist auch die einzige gerade Primzahl. Die nachfolgenden Primzahlen wären 3; 5; 7; 11; etc... Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Vgl. 19.2, auf S.165)

2.2.1.1 Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl (ausser 1), die keine Primzahl ist, kann man als Produkt schreiben, dessen Faktoren nur Primzahlen sind. Diese nennt man **Primfaktoren**. Die Darstellung einer Zahl als Produkt aus lauter Primfaktoren heißt **Primfaktorzerlegung**.
Beispiele:
$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 7 \cdot 9 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

2.2.2 Die Reihenfolge der Operationen

Die **Reihenfolge** der Operationen wird in der Mathematik nach strengen Regeln vorgenommen. Sie ist wie folgt festgelegt:

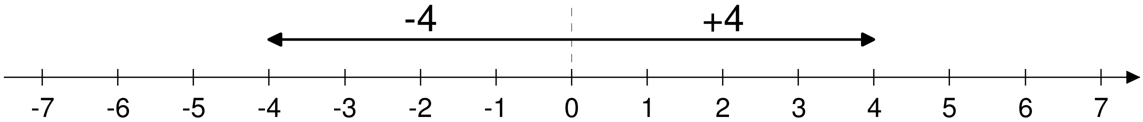
1. Ausdrücke in **Klammern** (Schachtelklammern werden von innen nach aussen aufgelöst.)
2. Punkt-Operationen (**•**, **:**)
3. **Strich**-Operationen (**+**, **–**)

Beispiele:
2 + 3 • (4 + 5) =

20 – 8 : 4 =

2.2.3 Betrag einer Zahl

Der Abstand eines Punkts auf dem Zahlenstrahl vom Nullpunkt heisst der **absolute Betrag** (kurz: Betrag) der entsprechenden Zahl.



Man schreibt: $|a|$ lies: "Betrag der Zahl a", z.B.: $|-4| = |+4| = 4$

Beispiele:

$|-2.5| =$ $\qquad$ $|17| =$

$|0| =$ $\qquad$ $|5-7| =$

2.2.4 Bruchrechnen

2.2.4.1 Brüche kürzen

Sind im Zähler und im Nenner eines Bruches gleiche Faktoren, so kann man sie kürzen, indem man Zähler und Nenner durch den gleichen Faktor teilt. Wenn man einen Faktor kürzt, bleibt immer der Faktor 1 stehen. Der Wert des Bruches ändert sich beim Kürzen nicht. Summen dürfen nicht gekürzt werden: Zwei Beispiele:

1) $\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9}$ (...mit „9" kürzen) $= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

2) $\frac{8+5}{5}$ (...hier wäre es *falsch mit „5" zu kürzen*. Im Zähler liegt eine Summe und *kein Produkt* vor!)

Das richtige Resultat lautet hier somit: $\underline{\underline{\frac{13}{5}}}$ ...und nicht 9 !

2.2.4.2 Brüche addieren / subtrahieren

Man kann *nur gleichnamige* Brüche addieren /subtrahieren: Man addiert / subtrahiert die Zähler und behält den Nenner bei. Wenn möglich kürzt man anschliessend. Ungleichnamige Brüche muss man zuerst gleichnamig machen (d. h. auf gleiche Nenner erweitern). Dabei nimmt man *nicht irgendeinen beliebigen gemeinsamen Nenner*, *sondern* den *kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner* (den sog. *Hauptnenner,* auch *kleinstes gemeinsames Vielfaches „kgV"* der beiden Nenner *genannt*). Die Rechnung wird dann einfacher, und wir brauchen nicht, mit allzu grossen Zahlen zu rechnen! Ein Beispiel:

$\frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$ (...noch mit „4" kürzen) $= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

2.2.4.3 Brüche multiplizieren

Zwei Brüche werden nach der Merkregel „*Zähler • Zähler*" *über* „*Nenner • Nenner*" miteinander multipliziert. *Vor* dem *Ausmultiplizieren kürzen* wir, falls möglich. Auch da gilt: Die Rechnung wird dann einfacher, und wir brauchen nicht, mit allzu grossen Zahlen zu rechnen! Ein Beispiel:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{24}{7}$ (...vor dem Ausmultiplizieren mit „3" kürzen!) $= \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{16}{7}}}$

2.2.4.4 Brüche dividieren

Brüche werden dividiert, indem man *den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.* (Dies folgt aus der Tatsache, dass die Division die Umkehroperation der Multiplikation ist.) Die Division von Brüchen wird also auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt! Wie oben gilt: *Vor* dem *Ausmultiplizieren* wenn möglich *kürzen*. Ein Beispiel:

$\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \bullet \frac{3}{1}$ (...noch mit „3" kürzen und ausmultiplizieren) $= \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

2.2.4.5 Doppelbrüche

Doppelbrüche müssen deutlich geschrieben sein. Der Hauptbruchstrich muss länger und eher dicker sein als die anderen. Das Gleichheitszeichen gehört auf die Höhe des Hauptbruchstrichs. Da ein Doppelbruch ebenso gut als Division zweier Brüche aufgefasst werden kann, gilt für die Berechnung: Der *obere Bruch* wird *mit dem Kehrwert des unteren multipliziert.* Ein Beispiel:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \bullet \frac{3}{1} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

2.2.5 Die Sonderrolle der Zahl Null

2.2.5.1 Die Addition / Subtraktion und Multiplikation mit der Null

Zwei Beispiele:

7 **+ 0** = 7 Fazit: „+ *0*“ und „**–** *0*“ *ändern* einen *Wert nicht.*

5 • 0 = 0 Fazit: Ein *Produkt ist Null*, *wenn mindestens ein Faktor Null* ist.

2.2.5.2 Die Division mit der Null

Die Fragestellung: Welchen Wert erhalten wir zum Bsp. für „4 **: 0**“ ???

...Wir greifen nach dem Taschenrechner und stellen erstaunt fest, dass kein bestimmter Wert ausgegeben wird. Je nach Taschenrechner steht die eine oder andere Fehlermeldung auf dem Display. „Error“ oder in einer Excel-Tabelle etwa „#DIV/0!“.
Was ist die Erklärung hierfür?

Die Antwort: Man sollte sich wieder vor Augen führen, dass die *Division* zweier Zahlen als *Umkehroperation der Multiplikation* betrachtet wird.
Etwa „8 : 4“ zu rechnen, bedeutet eine Zahl zu finden, die mit 4 multipliziert 8 ergibt. Hier ist das Resultat offensichtlich: Die 2 erfüllt diese Bedingung, denn 2 • 4 = 8.
Wie ist es bei „4 **: 0**“ ? Unsere Aufgabe lautet: Man finde eine Zahl, die mit **0** multipliziert 4 ergibt. ...Eine solche Zahl gibt es nicht; denn jede Zahl mit 0 multipliziert, ergibt wieder 0!

ⓘ Wir halten also fest: **Die Division mit der Null ist nicht definiert! Wenn also im Nenner eines Bruches der Wert Null steht, ergibt der Bruch keinen Sinn!**

2.2.6 Das Umwandeln von Dezimalzahlen in Brüche

Es gibt besonders „vertraute“ Dezimalzahlen, die man sofort in Brüche umwandeln kann. Dazu gehören 0.5; 0.25; 0.125; usw. Wie verhält es sich aber mit Dezimalzahlen wie 0.3125 oder 0.636363... ?

2.2.6.1 Endliche Dezimalzahlen in Brüche umwandeln

Mit endlichen Dezimalzahlen sei hier gemeint, dass die Dezimalzahl nach dem Komma nach endlich vielen Stellen abbricht; z. B. 0.55; oder 0.3125.

Das Vorgehen ist in diesem Fall einfach. Die folgenden Beispiele sollten selbsterklärend sein:

Beispiele:

a) $\underline{\underline{0.55}}$ lässt sich schreiben als $\frac{55}{100}$. Wir kürzen anschliessend noch mit 5 und erhalten: $\underline{\underline{\frac{11}{20}}}$.

b) $\underline{\underline{0.3125}}$ lässt sich schreiben als $\frac{3125}{10000}$. Vollständiges Kürzen ergibt: $\underline{\underline{\frac{5}{16}}}$

2.2.6.2 Periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln

Zahlen wie 0.636363... oder 0.7333... sind sogenannte periodische Dezimalzahlen. Ab einer bestimmten Stelle wiederholt sich eine Zahlenfolge bis in alle Unendlichkeiten. Dieser Zahlenfolge sagt man auch „Periode".

0.636363... hat die Periode 63. Man schreibt hierfür auch $0.\overline{63}$

0.7333... hat die Periode 3. Anders geschrieben: $0.7\overline{3}$.

Aber wie kann man solche periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln? Das Vorgehen ist hier etwas aufwändiger, dafür umso eleganter!

Die Idee: Durch eine geschickte Subtraktion bringen wir den periodischen Teil der Dezimalzahl zum Verschwinden. Die folgenden Beispiele sollten selbsterklärend sein:

Beispiele:

a) $x = 0.\overline{2}$

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 2.222\ldots \\ -\ \mathbf{1x} & = & \mathbf{0.222\ldots} \\ \hline 9x & = & 2 \end{array}$$

Somit ist $\boldsymbol{x} = \underline{\underline{\boldsymbol{\frac{2}{9}}}}$.

b) $x = 0.\overline{63}$

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 63.6363\ldots \\ -\ 1x & = & 0.6363\ldots \\ \hline 99x & = & 63 \end{array}$$

Somit ist $x = \frac{63}{99} = \underline{\underline{\frac{7}{11}}}$.

c) $x = 0.7\overline{3}$

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 73.333\ldots \\ -\ 10x & = & 7.333\ldots \\ \hline 90x & = & 66 \end{array}$$

Somit ist $x = \frac{66}{90} = \underline{\underline{\frac{11}{15}}}$.

2.2.6.3 Exkurs zu nichtabbrechenden Dezimalzahlen

Endliche und periodische Dezimalzahlen lassen sich wie eben gesehen stets als Brüche „ganzer Zahlen" darstellen. Man spricht dann auch von sog. „**rationalen**" Zahlen und bezeichnet diese symbolisch mit $\mathbb{Q}$ (Vgl. dazu 4.3.3).

Es gibt jedoch auch *nicht abbrechende Dezimalzahlen*, die *nie periodisch* nach dem Komma werden.

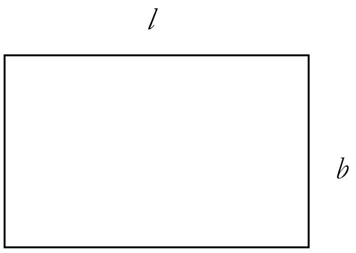
Beispiele für solche Zahlen sind etwa $\pi = \boldsymbol{3.14159265358979323846264338327 9}\ldots$, oder $\sqrt{2} = \boldsymbol{1.4142135623730950488016887242097...}$.
Diese Zahlen lassen sich nicht als Brüche ganzer Zahlen darstellen, was sich auch beweisen lässt.

Diese Kategorie von Zahlen nennt man **irrationale** Zahlen. Alle Wurzeln aus Zahlen die keine Quadratzahlen sind, sind weitere Beispiele für irrationale Zahlen. Für die Bezeichnung irrationaler Zahlen ist kein eigener Buchstabe vorgesehen.

3 ALGEBRA

In diesem Kapitel geht es in erster Linie darum, sattelfest im Umgang mit „Variablen“ und „Termen“ zu werden. Etwas salopper ausgedrückt, es geht darum mit „Buchstaben“ und nicht nur mit Zahlen rechnen zu können. Anhand des einführenden Beispiels sollen die Begriffe „Variable“, „Term“ und „Umformung“ erklärt werden.

Einführendes Beispiel:
Man berechne den Umfang eines Rechtecks mit der Länge l und der Breite b.



Bei l und b handelt es sich um *Variablen*. Variablen sind Platzhalter für Zahlen. Hier, zum Beispiel, werden Sie je nach Grösse des Rechtecks verschiedene (eben: variable) Zahlen für l und b einsetzen.

Egal wie gross das Rechteck jedoch ist, der Umfang wird sich stets mit der Formel

„Länge + Breite + Länge + Breite“

berechnen lassen. Mit Variablen ausgedrückt:

„$l + b + l + b$“.

Einem *solchen* Ausdruck sagt man in der Mathematik auch Term (*Für den Begriff „Term“ siehe auch Anhang 19.3 auf S.166*). Diesen Term können wir natürlich noch etwas vereinfacht darstellen. Wir formen um, und zwar so, dass der Wert des Umfangs unverändert bleibt. (Man spricht deshalb auch von einer sogenannten äquivalenten[1] Termumformung.)

$$\begin{aligned} Umfang &= l + b + l + b \\ &= 2\,l + 2b \\ &= 2 \cdot (l + b) \end{aligned}$$

Gerade diese „Term-Umformungen“ die nach bestimmten Rechengesetzen und Regeln erfolgen, wollen wir nun kennen lernen und anschliessend üben...

[1] Äquivalenz [zu lateinisch aequivalentia „Gleichwertigkeit“]

3.1 Die Rechengesetze

3.1.1 Rechengesetze der Addition

	in Worten	für a, b, c gilt:
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	Die Reihenfolge der Summanden hat keinen Einfluss auf die Summe, d.h. es gilt:	**a + b = b + a**
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	Bei drei Summanden hat die Reihenfolge der Additionen keinen Einfluss auf die Summe, d.h. es gilt:	**(a + b) + c = a + (b + c)**

Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten entsprechend auch für Summen mit beliebig vielen Summanden.

3.1.2 Rechengesetze der Multiplikation

	in Worten	für a, b, c gilt:
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	Die Reihenfolge der Faktoren hat keinen Einfluss auf das Produkt, d.h. es gilt:	**ab = ba**
Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	In einem Produkt aus drei Faktoren hat die Reihenfolge der Multiplikationen keinen Einfluss auf das Produkt, d.h. es gilt:	**(ab)c = a(bc)**

3.1.3 Das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Es regelt das Zusammenwirken von Addition und Multiplikation.

	für a, b, c gilt:
Man darf eine Summe multiplizieren, indem man zuerst die Summanden multipliziert und dann die erhaltenen Produkte addiert (sog. Gliedweises Ausmultiplizieren).	**a (b + c) = ab + ac**
oder umgekehrt: In einer Summe zweier Produkte darf man einen gemeinsamen Faktor ausklammern.	**ab + ac = a (b + c)**

3.2 Termumformungen / Anwendungen

3.2.1 Summen und Differenzen

Klammern, vor denen das Operationszeichen **+** steht, können weggelassen werden. Beim Weglassen von Klammern, vor denen das Operationszeichen **–** steht, müssen die in der Klammer auftretenden Vorzeichen gewechselt werden.	$a + (b + c - d) = a + b + c - d$ $a - (b + c - d) = a - b - c + d$
Gleiche Variablen können addiert resp. subtrahiert werden.	$b + b + b + c + c = 3b + 2c$

Beispiele:

1) $5a - (2b - 2a) = 5a - 2b + 2a = \underline{7a - 2b}$

2) $4x + (2x - y) - (2y - 2x) = 4x + 2x - y - 2y + 2x = \underline{8x - 3y}$

3) $(-19m - 5n + 1) - (4m - 2n - 3) =$ ✎

3.2.2 Schachtelklammern

Kommen in einer Aufgabe runde und eckige Klammerformen vor, so löst man schrittweise „von innen nach aussen“ zuerst die runden, dann die eckigen Klammern auf. Überhaupt werden Schachtelklammern immer „von innen nach aussen“ aufgelöst.	$\mathbf{a - [b - (c - d)] =}$ $\mathbf{a - [b - c + d] =}$ $\mathbf{a - b + c - d}$

Ein Musterbeispiel:

$40p - [(30q - 12p) - (7q + 3p)] =$	
$= 40p - [30q - 12p - 7q - 3p]$	*Innere Klammern aufgelöst*
$= 40p - [23q - 15p]$	*zusammengefasst*
$= 40p - 23q + 15p$	*Eckige Klammern aufgelöst*
$= \underline{55p - 23q}$	*Zusammengefasst*

Ein weiteres Beispiel:

$7m - 5n - [5m - (3n - n) - (2m + n) - 5n] =$ ✎

3.2.3 Produkte, Potenzen

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, das Produkt zweier Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ.	**a • b = ab** **(–a) • (–b) = ab** **(–a) • b = – ab** **a • (–b) = – ab**
Ein Produkt gleicher Faktoren kann als Potenz geschrieben werden:	**a • a • a • a =** $\mathbf{a^4}$

Beispiele:

1) $x^2 \cdot x^3y = \underline{\underline{x^5y}}$ (Die Potenzregeln werden wir später (vgl. 7.3) ausführlich behandeln. Vorläufig brauchen wir nur die folgende Potenzregel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Man überlege sich wie man die Herleitung dieser Regel plausibel erklären kann!)

2) $8ab \cdot 4ac = \underline{\underline{32a^2bc}}$

3) $2a(-b)(-c) = \underline{\underline{2abc}}$ (Wenn der Multiplikationspunkt · nicht notwendig ist, lässt man ihn weg.)

3.2.4 Anwendungen des Distributivgesetzes

Wir erinnern uns: Das Distributivgesetz regelt das Zusammenwirken von Addition und Multiplikation. „Gliedweises Ausmultiplizieren".	**a (b + c) = ab + ac**

Beispiele:

1) $6(a + 2b) = \underline{\underline{6a + 12b}}$

2) $b(2b + 1) = \underline{\underline{2b^2 + b}}$

3) $(2n + 5)\,5 = \underline{\underline{10n + 25}}$

4) $-5(2a - b + 3c) =$

3.2.5 Die erweiterte Distributivregel (Multiplikation von Summen)

Bei einer Multiplikation von Summen muss jedes Glied der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert werden. „Gliedweises Ausmultiplizieren".	**(a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd**

Bemerkung: Die erweiterte Distributivregel ist eine Folgerung aus dem Distributivgesetz. Dies sieht man folgendermassen: Wir bezeichnen vorübergehend den 2. Faktor $(c + d)$ durch eine einzelne Variable, etwa durch x und erhalten[1]:
$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx$.
Ersetzen wir nun x wieder durch (c + d), so folgt weiter:
$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

[1] Die Ersetzung von (c + d) durch x ist eine Methode, die in der Mathematik öfters verwendet wird. Man spricht dann von einer sog. „Substitution". Später werden wir diese Methode wieder antreffen.

Beispiele:

1) $(2a - c)\,(a - 2c) = 2a^2 - 4ac - ac + 2c^2 = \underline{\underline{2a^2 - 5ac + 2c^2}}$

ⓘ Die Regel „Gliedweises Ausmultiplizieren" lässt sich problemlos auf Klammern mit mehr als zwei Summanden übertragen:

2) $(a + b)\,(x + y + z) = \underline{\underline{ax + ay + az + bx + by + bz}}$

3) $(2x - y + 3)\,(x + 3y) =$ ✎

ⓘ Mehrere Klammern werden miteinander multipliziert, indem man schrittweise zuerst zwei Klammern multipliziert und anschliessend das entstehende Produkt mit der dritten Klammer multipliziert (Assoziativgesetz!):

4) $(x + 3)\,(x + 5)\,(x - 2) =$

$(x^2 + 5x + 3x + 15)\,(x - 2) =$ (Um Rechenaufwand zu sparen, die linke Klammer zuerst vereinfachen!)

$(x^2 + 8x + 15)\,(x - 2) =$

$x^3 - 2x^2 + 8x^2 - 16x + 15x - 30 = \underline{x^3 + 6x^2 - x - 30}$.

3.3 Die binomischen[1] Formeln

Die binomischen Formeln - es gibt drei Stück davon - sind ein Hilfsmittel zum Ausmultiplizieren und Ausklammern. Beim Ausmultiplizieren sparen sie Zeit, beim Ausklammern (siehe nächstes Kapitel 3.4.3) sind sie oft unersetzlich! Deshalb lohnt es sich diese Formeln auswendig zu lernen.

3.3.1 Die 1. binomische Formel

Diese wird angewendet, wenn eine Summe quadriert wird. Sie lautet:

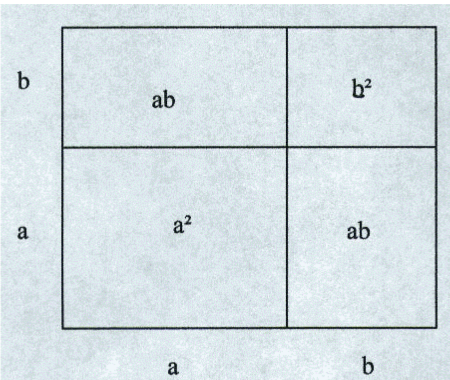
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Merkregel: „1. Quadrat + Doppelprodukt + 2. Quadrat“.

Man prüfe durch schriftliches Ausmultiplizieren nach, ob sie richtig ist!

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$

Bemerkung: Die Formel lässt sich auch geometrisch herleiten:



Beispiele:

1) $(3c + d)^2 = 9c^2 + 6cd + d^2$ (Da a und b Variablen sind, also beliebig wählbar, gilt die binomische Formel natürlich auch für $(3c + d)^2$. Hier steht 3c für a und d für b!) Im Vergleich dazu das gliedweise Ausmultiplizieren: $(3c + d)(3c + d) = 9c^2 + 3cd + 3cd + d^2 = 9c^2 + 6cd + d^2$.

2) Für a und b kann man also alles Mögliche einsetzen. Etwa abstrakt gesehen $\triangle$ und $\square$:
$(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2\,\triangle\square + \square^2$

3) $(2x + 3y)^2 =$

...Falls man noch unsicher ist...: Man erhält das Ergebnis, indem man *2x für a* und *3y für b* auf der rechten Seite der binomischen Formel $(a^2 + 2ab + b^2)$ einsetzt. Also $(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = \underline{4x^2 + 12xy + 9y^2}$.
Mit der Zeit wird man das Ergebnis gleich hinschreiben können. Das ist nun mal nichts anderes als Übungssache!

[1] Das Wort *Binom* steht für eine Summe aus *zwei* Gliedern. Binome sind also Terme wie $a + b$, $2x + y$, $3a - 2b$, usw.

3.3.2 Die 2. binomische Formel

Diese wird angewendet, wenn eine Differenz quadriert wird. Sie lautet:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Merkregel: „1. Quadrat – Doppelprodukt + 2. Quadrat".

Man prüfe durch schriftliches Ausmultiplizieren nach, ob sie richtig ist!

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

<u>Beispiele</u>:

1) $(s - 5u)^2 = s^2 - 10su + 25u^2$

2) $(6x - 5)^2 = 36x^2 - 60x + 25$

3) $(9v - 3w)^2 =$

3.3.3 Die 3. binomische Formel

Wenn man so will, ist sie eine Mischung aus der 1. und der 2. binomischen Formel und lautet:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Merkregel: „Summe mal Differenz gleich Differenz der Quadrate".

Man prüfe durch schriftliches Ausmultiplizieren nach, ob sie richtig ist!

$(a + b) \bullet (a - b) =$

<u>Beispiele</u>:

1) $(2s - 1)(2s + 1) = \underline{\underline{4s^2 - 1}}$ (Hier wurde stillschweigend die Tatsache „$1^2 = 1$" verwendet.) Im Vergleich dazu das gliedweise Ausmultiplizieren: $(2s - 1)(2s + 1) = 4s^2 + 2s - 2s - 1 = 4s^2 - 1$.

2) $(2x - 5y)(2x + 5y) = \underline{\underline{4x^2 - 25y^2}}$

3) $(7f - 8g)(7f + 8g) =$

3.3.4 Binomische Formeln / Zusammenfassung & Motivation

„Ein Inhalt wird dazu in algebraische Formeln eingeschlossen, damit man, indem man die Formel anwendet, nicht hundertmal ein und dasselbe wiederholen muss."
A. I. Herzen.

3.3.4.1 Zusammenfassung der drei Binomischen Formeln

1.bF: $\boxed{(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2}$

2.bF: $\boxed{(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2}$

3.bF: $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

3.3.4.2 Motivation der binomischen Formeln

Der Mathematik-Skeptiker sagt sich nun: "Die binomischen Formeln sind ja jetzt soweit bekannt, und beim Ausmultiplizieren sparen sie tatsächlich ein paar Sekunden ein. Aber allein deswegen der ganze Aufwand? Das kann ja wohl nicht alles gewesen sein!"

Beruhigenderweise war das auch nicht alles, denn ***wirklich unersetzlich sind die binomischen Formeln erst, wenn man sie rückwärts anwendet!***

Angenommen, der folgende Bruchterm soll vereinfacht werden: $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x-3}$.

Was für Möglichkeiten zur Vereinfachung gibt es wohl?

Natürlich „binomische Formeln"!: $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x-3} = \dfrac{(2x-3)^2}{2x-3} = 2x-3$.

Hier wurde die 2. binomische Formel offenbar rückwärts angewendet, und aus einer Summe wurden wieder Faktoren, die dann gekürzt werden konnten.

Bemerkung: Wenn man eine Summe bzw. eine Differenz in ein Produkt verwandelt, spricht man in der Mathematik von einer „Faktorzerlegung". Damit werden wir uns im folgenden Kapitel 3.4 befassen. Die Vereinfachung von Bruchtermen hingegen folgt im übernächsten Kapitel 3.5.

Hier noch 3 <u>Beispiele</u> <u>zu</u> den <u>binomischen Formeln</u>; und zwar <u>rückwärts angewendet</u>:

1) $16j^2 + 16jk + 4k^2 = (4j + 2k)^2$ ...Man überlege wie man auf die Lösung kommen kann!

2) $81v^2 - 54v + 9 =$ ✎

3) $4x^2 - 16y^2 =$ ✎

4) $(x + y)^2 - z^2 =$ ✎

Tipp: Bevor man die 3.binomische Formel „$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$" anwendet, sollte man sich zunächst überlegen was dem „a" und was dem „b" bei diesem Beispiel entspricht! $\boxed{a = \quad\quad}$ und $\boxed{b = \quad}$.

3.4 Faktorzerlegungen

In diesem Kapitel geht es darum Summenterme (bzw. Differenzen) in ein Produkt zu verwandeln. Man sagt auch „einen Term in Faktoren zu zerlegen". Ein Beispiel wäre, wie oben gesehen:

$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Hier wurde eine binomische Formel rückwärts angewendet. Wir werden nun weitere Methoden für die Faktorzerlegung kennen lernen, wie etwa das Ausklammern gemeinsamer Faktoren, etc..

Kenntnisse und „Tricks" aus dem Thema Faktorzerlegung brauchen wir bereits im nächsten Kapitel 3.5 „Bruchterme" :

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x - 3} = \frac{(2x-3)^2}{2x-3} = 2x - 3.$$

3.4.1 Das Ausklammern gemeinsamer Faktoren

Kommt ein Faktor in allen Gliedern eines Summenterms vor, so kann man ihn ausklammern. (Vgl. dazu auch: 3.1.3 Distributivgesetz, auf S.16)

Beispiele:

1) $2x + 2y = \mathbf{2}(x + y)$ ...der allen Gliedern **gemeinsame Faktor** war hier **2**.

2) $p^2y + py + 2y = \mathbf{y}(p^2 + p + 2)$ ...der allen Gliedern **gemeinsame Faktor** war hier **y**.

3) $12ab - 16ac - 32ad = \mathbf{4a}(3b - 4c - 8d)$ ...wir suchen jeweils den **grösstmöglichen gemeinsamen Faktor** aller Glieder. Hier also **4a**.

4) $3a^2 + a = \mathbf{a}(3a + 1)$ ...man denke sich bei „a" den Faktor 1, also $1 \cdot a$.

5) $x^4 - x^3 =$ ✎

6) $15ab^2c - 10abc^2 - 25\,ab^2 =$ ✎

3.4.1.1 Ausklammern eines Klammerterms

Der allen Gliedern *gemeinsame Faktor kann* sehr wohl *auch ein Klammerterm sein* !

Beispiel:

$x \cdot (\boldsymbol{a+b}) + y \cdot (\boldsymbol{a+b}) = \underline{\underline{(\boldsymbol{a+b}) \cdot (x+y)}}$, der allen Gliedern ***gemeinsame Faktor*** war hier ***(a+b)***.

ⓘ Bitte vermeiden Sie die häufigen Fehler, wie etwa $x \cdot (a+b) + y \cdot (a+b) = (x+y)(a+b)^2$ oder $x \cdot (a+b) + y \cdot (a+b) = xy \cdot (a+b)$. Wenn Sie die Terme ausmultiplizieren, sehen Sie, dass hier *falsch* faktorisiert wurde!

3.4.2 Schrittweises Ausklammern

Wir betrachten den folgenden Term, den wir in ein Produkt von Faktoren zerlegen möchten:
$ax + bx + ay + by$.

Einen allen Gliedern gemeinsamen Faktor, den man vorklammern könnte, gibt es hier nicht. Was man jedoch machen kann, ist, jeweils die *Teilsummen* $ax + bx$ und $ay + by$ *zu faktorisieren*:

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{x} + a\mathbf{y} + b\mathbf{y} = \mathbf{x}(a+b) + \mathbf{y}(a+b).$$

Nun können wir die *gemeinsame Klammer* ***(a+b)*** *vorklammern* (siehe 3.4.1.1):

$$ax + bx + ay + by = x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + y(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \underline{\underline{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(x+y)}}$$

3.4.2.1 Das Vorgehen beim schrittweisen Ausklammern

Das Vorgehen beim schrittweisen Ausklammern lässt sich also in <u>zwei Schritten</u> erklären:

<u>Schritt 1</u>: Durch „geschicktes" Faktorisieren der Teilsummen jeweils den gleichen Klammerterm als Faktor erhalten: $ax + bx + ay + by = x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + y(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

<u>Schritt 2</u>: Den Klammerterm als gemeinsamen Faktor vorklammern:
$x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + y(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(x+y)$.

Wir erläutern das Verfahren an zwei weiteren <u>Beispielen</u>:

1) $cx + dx - cy - dy$
...Aufgepasst: $cx + dx - cy - dy = x(c+d) + y(-c-d)$ wäre eine Sackgasse!
Um den gleichen Klammerterm zu erhalten, *klammern* wir x und $\mathbf{-y}$ *aus*! (Beim Setzen der Minusklammer Vorzeichen beachten!)

$$cx + dx - cy - dy = \mathbf{x}(c+d) - \mathbf{y}(c+d) = \underline{\underline{(c+d)(x-y)}}.$$

Eine *andere Möglichkeit* diese Aufgabe zu lösen, wäre durch *Umordnen der Summanden*:

$$cx + dx - cy - dy = cx - cy + dx - dy = c(x-y) + d(x-y) = \underline{\underline{(x-y)(c+d)}}.$$

2) $2a^2 + ab + 2a + b = a(2a+b) + 2a + b$ ....wie weiter? Haben wir einen gemeinsamen Klammerterm? Aber natürlich! Setzen wir doch eine Hilfsklammer und alles wird klar...

$$a(2a+b) + 2a + b = a(2a+b) + (2a+b) = \underline{\underline{(2a+b)(a+1)}}.$$

3) $4x + 2y - 6x^2 - 3xy \; =$

3.4.3 Zerlegen von Summen in binomische Formeln

Wie schon weiter oben erwähnt (siehe 3.3.4.2 auf S.22) sieht man den Nutzen der binomischen Formeln erst dann so richtig, wenn man sie rückwärts anwendet. Es folgen drei <u>Beispiele</u>:

1) $u^2 + 6uv + 9v^2 = (u + 3v)^2$ ...1. binomische Formel!

2) $49x^2 - 28x + 4 =$

3) $x^2 - 9 =$

ⓘ Aber aufgepasst! *Nicht alles was nach einer binomischen Formel aussieht, ist auch eine!* Dazu müssen schon zwei Quadrate und ein *passendes gemischtes Glied* vorkommen (Beispiele 1) und 2)) oder *eine Differenz zweier Quadrate* (wie in Beispiel 3))!

$x^2 + 2xy + y$	Ist **keine** binomische Formel, da das *3. Glied kein Quadratausdruck* ist.
$4a^2 + 10a + 25$	Ist **keine** binomische Formel, da das *2. Glied nicht dem Doppelprodukt entspricht.* $(2 \cdot 2a \cdot 5 = 20a)$!
$x^2 + 6x - 9$	Ist **keine** binomische Formel, da die *Vorzeichen nicht übereinstimmen.*
$4a^2 + 9b^2 - 12ab$	**Ist** eine binomische Formel, sie ist nur nicht richtig geordnet. Aus $4a^2 - 12ab + 9b^2$ ergibt sich $(2a - 3b)^2$.
$-25a^2 + 49b^2$	**Ist** ebenfalls eine binomische Formel, sie ist nur *nicht richtig geordnet.* Aus $49b^2 - 25a^2$ ergibt sich $(7b + 5a)(7b - 5a)$.
$9a^2 + 16b^2$	Ist **keine** binomische Formel (Die Vorzeichen stimmen nicht überein) **ⓘ Man merke sich: Bei einer Summe von Quadraten ist kein Faktorisieren möglich! Diesen Ausdruck muss man stehen lassen wie er ist!**

Manchmal muss man beim Faktorisieren von Summen eine Kombination verschiedener Methoden (bzw. mehrmals die gleiche Methode) anwenden um eine Summe vollständig in Faktoren zu zerlegen!

Hier einige Musterbeispiele:

1) $5x^2 + 10xy + 5y^2 = 5(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{\underline{5(x + y)^2}}$ ...zuerst 5 ausklammern, dann die 1. binomische Formel anwenden.

2) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2 = \underline{\underline{(x + y + z)\,(x + y - z)}}$ ... zuerst die 1., dann die 3. binomische Formel anwenden. Man vergleiche dazu auch das Beispiel 4) auf S.22.

3) $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = \underline{\underline{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}}$. ...Hier wenden wir zweimal die 3. binomische Formel an. Man beachte: Im ersten Schritt haben wir zwar bereits ein Produkt von Faktoren, aber die Faktoren sind *noch nicht vollständig zerlegt*.

4) $9a^2 - 6ab + b^2 - 15a + 5b =$ ...Ausklammern? Nein, da kein gemeinsamer Faktor in allen Gliedern vorkommt! Na ja, man erkennt die 2. binomische Formel in den ersten 3 Gliedern der Summe. Das soll

unser erster Schritt sein... $= (3a - b)^2 - 15a + 5b =$ ...aber wie weiter? Das ist noch kein Produkt von Faktoren! Was haben wir noch im Repertoire? Ach ja: „Klammern vorklammern". Wenn wir in der rechten Teilsumme –5 ausklammern, sollte uns das weiterbringen... $= (3a - b)^2 - 5(3a - b) =$ ...tatsächlich! Jetzt noch die Klammer vorklammern... $= (3a - b)\ ((3a - b) - 5) =$ ...unnötige Klammern weglassen... $=$ $\underline{(3a - b)\ (3a - b - 5)}$.

3.4.4 Zerlegung quadratischer Terme durch Systematisches Probieren oder kurz: Die „Probiermethode"

Wir betrachten das Produkt „$(x + 3)(x + 5)$" und erhalten als Lösung den quadratischen Term: „$x^2 + 8x + 15$".

Die *Frage* ist nun, wie man umgekehrt von einem quadratischen Term auf dessen Zerlegung kommt, beim obigen Beispiel also, wie man von „$x^2 + 8x + 15$" auf „$(x + 3)(x + 5)$" kommt.

Die *Antwort*: Mit dem entsprechenden Ansatz und mit systematischem Probieren!

Ein Beispiel:
Wir möchten $x^2 + 9x + 20$ faktorisieren.

Ansatz: $x^2 + 9x + 20 = \mathbf{(x \qquad)(x \qquad)}$

Systematisches Probieren: In den Klammern müssen zwei Zahlen stehen, deren Produkt 20 ist und deren Summe 9 ist, damit man auf die 9x kommt. Man muss nicht lange suchen, bis man die Lösung sieht...

$x^2 + 9x + 20 = (x \mathbf{+ 4})(x \mathbf{+ 5})$. ...Durch das Ausmultiplizieren hat man stets eine Kontrollmöglichkeit!

Wir erläutern diese Methode an weiteren Beispielen:

1) $x^2 + 5xy + 6y^2 = (x \mathbf{+ 2y})(x \mathbf{+ 3y})$

2) $x^2 \mathbf{-} 14x \mathbf{+} 40 =$ $(x \qquad)(x \qquad)$ Systematisches Probieren: Das Produkt der zwei gesuchten Zahlen soll +40 und die Summe –14 betragen. Etwa –5 und –8? Nein! Sondern: .... und .... !

3) $x^2 - 6x - 27 =$

4) $x^2 + 5x + 8 =$

5) Eine etwas anspruchsvollere Aufgabe: $2x^2 + 9xy + 10y^2 =$

Tipp: Versuchen Sie den (naheliegenden!) Ansatz: (2x + ...) (x + ...). Kontrolle nicht vergessen!

Mit dem Beherrschen der Faktorzerlegung wird nun das nächste Kapitel „Bruchterme" zum Genuss! Denn beim Umgang mit Bruchtermen ist das Faktorisieren des Zähler- und Nennerterms bereits die halbe Miete, wie wir gleich sehen werden...

3.5 Bruchterme

Das Bruchrechnen mit Termen unterscheidet sich im Wesentlichen nicht vom Bruchrechnen mit Zahlen (vgl. 2.2.4). Die dort erwähnten Rechenregeln, Hinweise und Bemerkungen gelten auch hier. Was neu dazukommt, ist die häufige Anwendung der Faktorzerlegung und ein paar Rechentricks, wie etwa zum richtigen Zeitpunkt eine (-1) auszuklammern.

3.5.1 Kürzen

z.B.: $\dfrac{2a^2-4a}{5a^2-10a}$

1) In Faktoren **zerlegen**: $\dfrac{2a^2-4a}{5a^2-10a}=\dfrac{2a(a-2)}{5a(a-2)}$

2) Gemeinsame Faktoren **kürzen**: Hier mit $a(a-2)$ kürzen: $\underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}$

ⓘ Man beachte: Kürzen, darf man nur, wenn Zähler und Nenner vollständig in Produkte zerlegt sind! (Vgl. dazu Beispiel 2) auf S.11)

z. B.: $\dfrac{a+b(2-a^2)}{b(2-a^2)}$ ...darf man nicht kürzen, selbst wenn's verlockend aussieht...

Beispiele:

1) $\dfrac{4x+4}{2x^2-2}=$ ✎

2) $\dfrac{6x^2-6y^2}{4x^2+8xy+4y^2}=$ ✎

3.5.2 Addieren & Subtrahieren

Wir erinnern uns, dass wir nur gleichnamige Brüche addieren resp. subtrahieren können. Aber wie finden wir den Hauptnenner? Die Antwort: Durch Faktorisieren der Nenner!

z.B.: $\frac{3}{2a-2}-\frac{a}{a^2-1}$ ...faktorisieren der Nenner... $\frac{3}{2(a-1)}-\frac{a}{(a+1)(a-1)}$

1) Hauptnenner bestimmen: **HN**: $2(a+1)(a-1)$

Zur Erinnerung: Der HN ist das **kleinste** gemeinsame Vielfache („kgV") der beiden Nenner. Der Hauptnenner ist also der kleinste Ausdruck, der beide Nenner als Faktor enthält!
HN: $2(a-1)(a+1)(a-1)$ wäre also falsch! Für Erläuterungen zum Thema „kgV" siehe Anhang 19.6, S.170.

2) Auf HN **erweitern**: $\frac{3\,\boldsymbol{(a+1)}}{2(a+1)(a-1)}-\frac{\boldsymbol{2}\,a}{2(a+1)(a-1)}$

Der erste Bruch wird mit $(a+1)$ erweitert, der zweite mit 2. Jetzt haben wir einen gemeinsamen Nenner.

3) Zähler zusammenfassen: $\frac{3a+3-2a}{2(a+1)(a-1)}=\frac{a+3}{2(a+1)(a-1)}$

4) Kürzen, falls möglich: (Hier nicht möglich.) $\frac{a+3}{2(a+1)(a-1)}$

ⓘ Man beachte: Aufgepasst bei der Subtraktion! Das Minuszeichen bezieht sich auf den gesamten nachfolgenden Zähler. Also: Nicht vergessen die Vorzeichen anzupassen! Hierzu ein Beispiel:
$\frac{a}{2}-\frac{b-c}{2}=\frac{a-b+c}{2}$.

Beispiele:

1) $\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a^2-1}=$ ✎

2) $\frac{4x+5}{x^2-x-12}-\frac{3}{x-4}=$ ✎

3.5.3 Multiplikation

z.B.: $\dfrac{2a}{(a^2-b^2)} \bullet \dfrac{(a-b)}{4}$

1) Vor dem Multiplizieren **faktorisieren und kürzen**: $\dfrac{2a}{(a+b)(a-b)} \bullet \dfrac{(a-b)}{4} = \dfrac{a}{(a+b)} \bullet \dfrac{1}{2}$

2) Zähler • Zähler & **Nenner • Nenner**: $= \underline{\underline{\dfrac{a}{2(a+b)}}}$

ⓘ Man beachte: Bei der Multiplikation steht das Faktorisieren mit nachfolgendem Kürzen im Vordergrund. Würden wir vor dem Ausmultiplizieren der Brüche nicht kürzen, hätten wir einen viel grösseren Rechenaufwand!

Beispiele:

1) $\dfrac{x+y}{3a+15} \bullet \dfrac{a+5}{x^2+2xy+y^2} =$

2) $\dfrac{x^4-10x^2+25}{2x^2} \bullet \dfrac{6x}{x^4-25} =$

3.5.4 Division

z.B.: $\frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2}$

1) „Bruch : *Bruch* = Bruch • *Kehrbruch*“: $\frac{(a+b)^2}{3b} \bullet \frac{6b^2}{a^2-b^2}$

2) Wie bei der **Multiplikation** fortfahren: $\frac{(a+b)^2}{3b} \bullet \frac{6b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)}{1} \bullet \frac{2b}{(a-b)} = \underline{\underline{\frac{2b(a+b)}{(a-b)}}}$

ⓘ Man beachte: Die Division von Brüchen wird durch die Regel „Bruch **:** *Bruch* = Bruch • *Kehrbruch*“ auf die Multiplikation von Brüchen zurückgeführt; und da kennt man sich bereits aus!

Beispiele:

1) $\frac{15a^2b^2-21ab}{a+b} : (25a^2b-35a) =$

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{1}{b^2-a^2} =$

3.5.5 Doppelbrüche

z.B.: $$\frac{\frac{(a+b)^2}{3b}}{\frac{a^2-b^2}{6b^2}}$$

1) Den **Doppelbruch** kann man problemlos **als Division** zweier Bruchterme **schreiben**:

$$\frac{\frac{(a+b)^2}{3b}}{\frac{a^2-b^2}{6b^2}} = \frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2}$$

2) Wie bei der **Division** fortfahren (siehe oben): $\frac{(a+b)^2}{3b} : \frac{a^2-b^2}{6b^2} = \ldots = \underline{\underline{\frac{2b(a+b)}{(a-b)}}}$

<u>Beispiel</u>:

1) $$\frac{\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}}{\frac{1}{a^2-1}} =$$

3.6 Schriftliches Divisionsverfahren für Polynome

Man kann nicht nur Zahlen schriftlich dividieren, sondern auch Polynome. Wir führen dazu ein Divisionsverfahren ein. Dabei lassen wir uns durch die schriftliche Division von Zahlen inspirieren:

Beispiel: 276 : 12 =... Wir schreiben jetzt alle Zwischenschritte an, auch die, die wir normalerweise im Kopf durchführen:

276	: *12* = **23**	*12* in 27 = **2**mal
- 24		**2** ·*12* = 24 (abziehen)
36		12 in 36 = **3**mal
- 36		**3** ·*12* = 36 (abziehen)
0		Es bleibt kein Rest übrig.

Analog rechnet man mit Polynomen. (*Für den Begriff „Polynom" siehe auch Anhang 19.3 auf S.166*)

$(x^2 + 5x + 6)$	$: (x + 2) = \mathbf{x + 3}$	$x^2 : x = \mathbf{x}$
$x^2 + 2x$		$\mathbf{x} \cdot (x + 2) = x^2 + 2x$ (abziehen)
$3x + 6$		$3x : x = \mathbf{3}$
$3x + 6$		$\mathbf{3} \cdot (x + 2) = 3x + 6$ (abziehen)
0		Es bleibt kein Rest übrig.

Probe durch Ausmultiplizieren: $\underline{(x + 2) \cdot (x + 3)} = x^2 + 2x + 3x + 6 = \underline{x^2 + 5x + 6}$. O.k.!

Eine Anwendung dieses schriftlichen Divisionsverfahrens lässt sich in der Analysis wieder finden, wenn es darum geht, sogenannte „schiefe Asymptoten" zu bestimmen (vgl. Kurs WMS II). Wir geben ein abschliessendes Beispiel einer Division (*mit Rest*) an. :

$(3x^3 - x^2 - 16x + 12) : (x + 2) =$

4 EINE EINFÜHRUNG IN DIE MENGENLEHRE

4.1 Was versteht die Mathematik unter einer Menge ?

Eine Menge im mathematischen Sinn ist eine *Zusammenfassung einzelner Dinge zu einem Ganzen*. Wenn von einer Menge im mathematischen Sinn die Rede ist, muss *von jedem Ding feststehen, ob es zur Menge gehört oder nicht*. Dabei kommt es nicht darauf an, ob man wirklich entscheiden kann, ob ein vorgelegtes Objekt zur Menge gehört oder nicht, wichtig ist nur, dass eine Entscheidung überhaupt möglich ist. Zudem müssen die zusammengefassten Dinge *voneinander unterscheidbar* sein.

Definition: Die *Dinge*, die zu einer Menge zusammengefasst werden, bezeichnet man als *die Elemente der Menge*.

Hier einige Beispiele von Mengen im Sinne der Mathematik:

- Die Menge der Personen in diesem Zimmer.
- Die Menge der geraden Primzahlen. (Diese Menge besteht nur aus der Zahl 2.)
- Die Menge der Teiler von 36.
- Die Menge der natürlichen Zahlen. (Diese Menge besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, ohne die Null. Also aus 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; .... usw. *Diese Menge hat unendlich viele Elemente!*) Weiter unten werden wir diese Menge mit $\mathbb{N}$ bezeichnen.

Keine Menge im Sinne der Mathematik wäre:

- Die Menge der guten Schachspieler in der Schweiz. (Es ist nicht genau gesagt, was man unter einem *guten* Schachspieler zu verstehen hat!)

Beispiele: ✎

Entscheiden Sie, ob durch die folgenden Erklärungen jeweils eine Menge im Sinne der mathematischen Mengenlehre bestimmt ist; ja oder nein?

a) Die Menge aller Primzahlen. Ja □ / Nein □

b) Die Menge aller sehr grossen Zahlen. Ja □ / Nein □

c) Die Menge aller Ausserirdischen. Ja □ / Nein □

4.2 Wie legt man ein Menge fest?

4.2.1 Das beschreibende Verfahren

Beim beschreibenden Verfahren wird eine Menge durch eine Eigenschaft, die ihre Elemente haben müssen, festgelegt (beschrieben).

Beispiel:
Die „**Menge der Teiler von 36**". Sie besteht aus den Zahlen 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.
(Alle hier aufgezählten Elemente haben die Eigenschaft, ein Teiler von 36 zu sein.)
Natürlich gehören auch die drei oben erwähnten Beispiele dazu:
„*Die Menge der geraden Primzahlen*", „*die Menge der Personen in diesem Zimmer*" und auch „*die Menge der natürlichen Zahlen*".

4.2.2 Die symbolische Darstellung

Durch Benutzung von Variablen lassen sich die Eigenschaften der Elemente einer Menge besser und kürzer angeben. Dazu benutzt man in der Mathematik eine eigene Schreibweise.

Beispiel:
Oben hatten wir die „*Menge der Teiler von 36*". Dies kann man nun auch folgendermassen schreiben:
{x ∈ ℕ | x ist ein Teiler von 36}.
Gelesen: „Die Menge aller natürlichen Zahlen x, für die gilt: x ist ein Teiler von 36". Das Zeichen „ | " wird gelesen als: „*für die gilt:*" Damit erspart man sich einiges an Schreibarbeit.
Ein weiteres Beispiel:
Für „*Die Menge der natürlichen geraden Zahlen*", können wir **{x ∈ ℕ | 2x }** schreiben.

4.2.3 Das aufzählende Verfahren

Beim aufzählenden Verfahren wird eine Menge durch Aufzählen ihrer Elemente festgelegt. Man schreibt diese zwischen zwei geschweiften Klammern „ { " und „ } " und trennt sie durch Kommata oder Strichpunkte.

Beispiel:
„*Die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind*", kann nach dem aufzählenden Verfahren wie folgt angegeben werden: **{2; 3; 5; 7}** (lies: „Menge mit den Elementen 2, 3, 5, und 7.)

Sonderfälle:
{1; 2; 3; 4; ... ;19; 20} bedeutet die Menge aller natürlichen Zahlen bis und mit 20. Mit den Punkten "..." deuten wir die nicht aufgeführten Elemente an.
{1; 2; 3; 4; ...} bedeutet die Menge der natürlichen Zahlen. Hier deuten die Punkte also an, dass die Zahlenfolge 1; 2; 3; 4 *ohne Ende* fortzusetzen ist.
Analog {... ; -2; -1; 0; 1; 2; ...} = Menge aller ganzen Zahlen. Weiter unten werden wir diese Menge mit ℤ bezeichnen.

Bemerkung:
Die Reihenfolge, in der man die Elemente einer Menge aufzählt, *ist ohne Belang.* Zwei Mengen heis-sen gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben, egal in welcher Reihenfolge diese vorkommen.
z.B.: {2; 3; 5; 7} = {3; 7; 2; 5}.
Wir halten fest: ***Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten***.

<u>Beispiele</u>**:** 🖉
Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente.

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 3\}$ **= {** **}**

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\}$ = **{** **}**

c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 81\}$ = **{** **}**

d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x(x - 2) = 0\}$ = **{** **}**

e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1 \text{ und } x > -2\}$ = **{** **}**

4.3 Die Bezeichnung von Mengen

Man erleichtert sich den Umgang mit Mengen, indem man sie *bezeichnet*. In der Mathematik sind dazu grosse Buchstaben üblich

Beispiele:
Die Menge der Wochentage könnte man etwa mit *W* bezeichnen, die Menge aller Schweizer mit *S* usw. In jedem dieser Fälle ist aber die Wahl des Buchstabens grundsätzlich frei.
Bei *Zahlenmengen* ist es jedoch anders. Da existieren nämlich spezielle, allgemein verbindliche Bezeichnungen. (Die meisten davon kennen Sie wahrscheinlich bereits.) Hier eine Liste dieser Bezeichnungen (auswendig zu lernen):

4.3.1 $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$.

4.3.2 $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen:

$\mathbb{Z} = \{... ; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$

4.3.3 $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen:

Dies ist die Menge aller *Bruchzahlen*.
(Es wäre mühsam diese Menge in aufzählender Form anzugeben.)

(Aufgepasst: Es gibt Zahlen wie etwa „π" oder „$\sqrt{2}$", die *keine* Elemente aus $\mathbb{Q}$ sind! Es lässt sich beweisen, dass sich diese *Zahlen nicht als Brüche darstellen lassen*! Diese Zahlen sind *nicht abbrechende Dezimalzahlen*, sie werden also *nie periodisch* nach dem Komma.
Diese neue Kategorie von Zahlen nennt man **irrationale** Zahlen. Alle Wurzeln aus Primzahlen und Kombinationen davon sind weitere Beispiele für irrationale Zahlen. Für die irrationalen Zahlen ist kein eigener Buchstabe vorgesehen.)

4.3.4 $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen:

Dies ist die Menge *aller* Zahlen. Also der ganze Zahlenstrahl, ohne Ausnahmen.
(Also die Menge der rationalen Zahlen vereinigt mit den irrationalen Zahlen.)

4.3.5 Unterbezeichnungen

Es gibt zusätzlich Unterbezeichnungen wie etwa:
$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Null.

$\mathbb{Q}^+$ ist die Menge der positiven rationalen Zahlen. (Ohne die Null.)

$\mathbb{R}^+$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen. (Ohne die Null.)

Beispiele:

Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch eine passende Bezeichnung.

a) Die Menge der positiven reellen Zahlen *einschliesslich* der Null: ....

b) Die Menge der negativen reellen Zahlen: ....

c) Wieso ist die Bezeichnung $\mathbb{Z}^+$ eher unüblich? ....

4.3.6 Weitere Bezeichnungen

Weitere Bezeichnungen in der Mathematik sind $\mathbb{G}$, $\mathbb{L}$ und $\mathbb{D}$, welche allgemein für „**Grundmenge**", „**Lösungsmenge**" und „**Definitionsmenge**" stehen. Etwa beim Lösen von Gleichungen, ist es üblich mit $\mathbb{D}$, die Menge aller sinnvollen, in die Gleichung einsetzbaren Zahlen zu bezeichnen, und mit $\mathbb{L}$ die Menge aller Zahlen zu bezeichnen, welche die Gleichung erfüllen. Später werden wir das noch öfters antreffen. Unter der Grundmenge „$\mathbb{G}$" einer Gleichung versteht man die Menge aller Zahlen, die von der Aufgabe aus zum Lösen einer Gleichung zugelassen werden. Wenn nichts anderes vorausgesetzt wird, nehmen wir für die Grundmenge $\mathbb{G}$ die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Ein Beispiel zur Illustration der eben genannten Mengen:

Wir betrachten die Gleichung „$\frac{4}{x} = 2$ ".

Dann gilt für diese Gleichung: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ohne die Null, $\mathbb{L} = \{2\}$.

Bemerkung:

Die Bezeichnung „$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ohne die Null" scheint etwas umständlich zu sein. In der Tat gibt es hierfür in der Mathematik eine entsprechende symbolische Bezeichnung:

Anstatt

„$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ **ohne** die Null"

schreibt man

„$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$".

Diese Schreibweise werden wir in Kapitel 4.6 noch genauer behandeln.

4.4 Die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge.

Vielfach muss man von einzelnen Elementen entscheiden können, ob sie einer gegebenen Menge angehören oder nicht. Dafür verwendet man in der Mengenlehre die Zeichen:

„*ist Element von*" „*ist nicht Element von*".

$\in$ und $\notin$

<u>Beispiele:</u>

$2 \in \mathbb{N}$; $-5 \notin \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{Z}$; $-1/3 \in \mathbb{Q}$; $-1/3 \notin \mathbb{R}^+$

4.5 Die Zugehörigkeit einer Menge zu einer Menge.

Will man von einer Menge angeben, ob sie Teilmenge, respektive nicht Teilmenge, einer Menge ist, benutzt man die Symbole $\subset$, respektive $\not\subset$

<u>Beispiele:</u>

$\{-2; 7\} \subset \mathbb{Z}$; $\{-2; 5\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\{\sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$

<u>Zum letzten Beispiel</u>:

Es gibt auch Mengen mit nur *einem* Element:

Z. B.: „Die Menge der geraden Primzahlen" = $\{2\}$. ← Die Klammern sind hier notwendig, denn wir betrachten hier eine Menge! Diese Menge besteht aus dem einzigen Element „2". Es ist also in der Mathematik *wichtig*, ganz klar *zwischen* einem *Element und* einer *Menge* zu *unterscheiden*!

<u>Beispiele:</u>

Man setze in die Lücke „..." das jeweils richtige Zeichen $\in$, $\notin$, $\subset$ oder $\not\subset$ ein.

a) 15 ..... $\mathbb{Z}$; $\frac{-2}{-18}$ ..... $\mathbb{Q}^+$

b) 39 ..... $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; ...\}$

c) 0.125 ..... $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots\right\}$

d) $\mathbb{N}$ ..... $\mathbb{N}_0$; $\{3; -2; 5\}$ ..... $\mathbb{N}_0$;

e) $\sqrt{2}-1$ ..... $\mathbb{Q}$; $\{\sqrt{7}\}$ ..... $\mathbb{R}$;

4.6 Die Differenzmenge

Wir betrachten z. B. die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und wollen nun einige Elemente aus $\mathbb{R}$ ausschliessen. Etwa die Zahlen -2 und 5. Wie soll man nun die neu entstandene Menge bezeichnen? Dazu gibt es die Bezeichnung „ \ “ (Gelesen: „ohne“). Wir schreiben also für unsere neu entstandene Menge:

$\mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$. (Gelesen: „$\mathbb{R}$ ohne -2 und 5“).

<u>Zwei weitere Beispiele</u>:

- Die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahlen 5, 3 und 17 lässt sich schreiben als: $\mathbb{N} \setminus \{5; 3; 17\}$

Differenzmengen braucht man hauptsächlich beim Angeben der Definitionsmenge einer sog. Bruchgleichung (= Gleichung, bei der x im Nenner auftritt).

- Etwa die Definitionsmenge der Gleichung „ $\frac{4}{x+8} = 2$ “, wobei die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ vorausgesetzt sei, lässt sich schreiben als: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

  Hinweis: Die Zahl -8 darf nicht für x eingesetzt werden, da sonst der Nenner Null wird. (Die Division durch Null ist nach wie vor nicht definiert! Siehe 2.2.5.2 auf S.12.) Alle andere Zahlen sind hingegen erlaubt.

<u>Beispiele</u>:

Es sei $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Man bestimme die Definitionsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $\frac{1}{x} = 5$,$\mathbb{D}$ = ...

b) $\frac{1}{2x+1} = 4 - x$,$\mathbb{D}$ = ...

c) $\frac{1}{x-7} = \frac{7}{3x-4}$,$\mathbb{D}$ = ...

d) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 5x$,$\mathbb{D}$ = ...

4.7 Die leere Menge

Ganz "natürlich" stossen wir in der Mathematik auch auf *Mengen ohne Elemente*; dazu ein Beispiel:

Man bestimme die Menge der Primzahlen zwischen 24 und 28.

Sie sehen sofort, dass keine der drei Zahlen 25, 26 und 27 eine Primzahl ist. Die genannte Menge enthält also *kein Element*. Dieser Menge sagt man nun „*leere Menge*“. Sie wird mit { } bezeichnet. Wir schreiben also:

Menge der Primzahlen zwischen 24 und 28 = ***{ }***

Beispiele:

Sind die folgenden Mengen leer? Geben Sie bei den nicht leeren Mengen jeweils ein Element an.

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x < 8\}$ Ja □ / Nein □, z.Bsp. ....

b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ Ja □ / Nein □, z.Bsp. ....

c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ Ja □ / Nein □, z.Bsp. ....

d) $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}$ Ja □ / Nein □, z.Bsp. ....

e) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x - x = x + 1\}$ Ja □ / Nein □, z.Bsp. ....

4.8 Weitere Bezeichnungen in der Mengenlehre

Mengen kann man zum Beispiel auch vereinigen, oder man kann ihren Durchschnitt bilden. Auch dafür gibt es in der Mathematik spezielle Bezeichnungen:

$A \cup B$: „**Vereinigung** der Mengen A und B."
$A \cap B$: „**Durchschnitt** der Mengen A und B."

Beispiel:
Wir betrachten zwei Mengen: $A = \{2; 3; 7; 9; 20\}$ und $B = \{4; 2; 6; 9\}$.

Für den „***Durchschnitt** von **A** und **B***" erhalten wir:
$\mathbf{A \cap B = \{2; 9\}}$. Denn die Elemente 2 und 9 sind sowohl in A als auch in B enthalten.

Für die „***Vereinigung** von **A** und **B***" erhalten wir:
$\mathbf{A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 7; 9; 20\}}$. Dies sind alle Elemente, die entweder zur Menge A oder zur Menge B, oder auch zu beiden Mengen gehören.

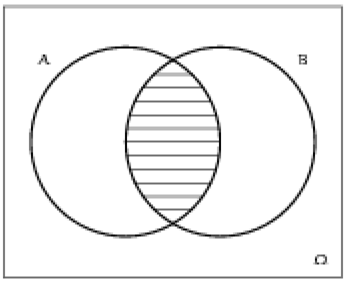
Ein weiteres Beispiel:
$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

4.9 Venn-Diagramme[1]

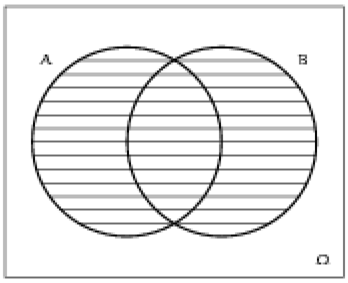
Bei einem Venn-Diagramm handelt es sich um eine grafische Darstellungsform, mit der man Beziehungen zwischen Mengen veranschaulichen kann.

Ein Anwendungsgebiet ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung: In einem Zufallsversuch (z. B. Würfeln) nennt man jede Teilmenge (z.B. {2;4;6}) der Menge Ω der möglichen Ausfälle ({1;2;3;4;5;6}) ein Ereignis. Da kann es, je nach Aufgabenstellung, oft nützlich sein mit Venn-Diagrammen zu arbeiten, um die Teilmengen graphisch zu veranschaulichen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein Gebiet für sich in der Mathematik. Dieses genauer zu besprechen, würde den Rahmen dieses Skripts sprengen. Wir werden deshalb nicht näher darauf eingehen.

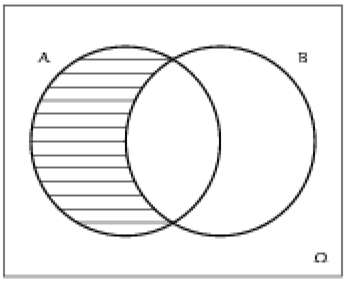
In den folgenden Venn-Diagrammen bezeichnet Ω die Grundmenge. A und B Teilmengen davon. Der Rest sollte selbsterklärend sein:



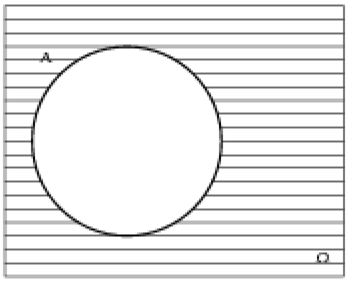
(a) $A \cap B$



(b) $A \cup B$



(c) $A \setminus B$



(d) $\bar{A}$

Bemerkung zu (d):
$\overline{A}$ bezeichnet die sog. **Komplementärmenge** zu A. Sie besteht aus allen Elementen die nicht der Teilmenge A angehören.

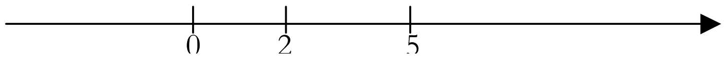
[1] nach John Venn, 1834 – 1923.

4.10 Intervalle auf der Zahlenachse

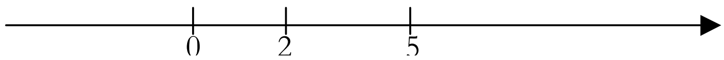
Mit einem „Intervall“ meint man einen Abschnitt auf der Zahlenachse. Bei einem Intervall handelt es sich also um eine Teilmenge aus $\mathbb{R}$.
Es gibt endliche und unendliche Intervalle. Auch für Intervalle gibt es in der Mathematik spezielle Schreibweisen:

Beispiele:

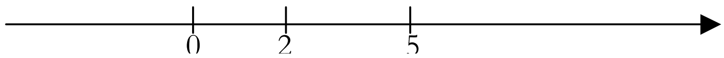
1) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\} =$ **[2 ; 5]**



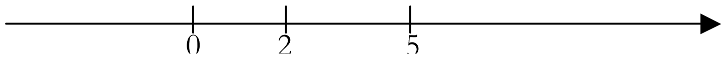
2) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\} =$ **[2 ; 5[**



3) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq 5\} =$ **]- ∞ ; 5]**



4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < \infty\} =$ **]2 ; ∞[**



Man schreibt also die kleinere Grenze links, die grössere rechts, getrennt durch ein Semikolon „ ; “. Ist die Klammer auswärts gerichtet, so gehört die jeweilige Grenze nicht mehr zum angegebenen Bereich; dagegen z. B. bei]-∞ ; 5] gehört die Grenze 5 noch zum Intervall dazu. Bei $\pm\infty$ (unendlich) ist die Klammer stets auswärts gerichtet.

5 AUSSAGEN UND AUSSAGEFORMEN

5.1 Aussagen

Definition:

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde (Satz), von dem es sinnvoll ist zu sagen, dass sein Inhalt wahr oder falsch ist. Eine Aussage hat entweder den Wahrheitswert *wahr* oder *falsch*.

Beispiele:

1) „3 + 4 = 6“ ist eine Aussage, und zwar eine falsche Aussage.

2) „12 ist eine gerade Zahl“ ist eine wahre Aussage.

3) „Bern ist die Hauptstadt der Schweiz“ ist eine wahre Aussage.

3) „18 ist eine schöne Zahl“ ist keine Aussage, da es Ansichtssache ist, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.

5.2 Aussageformen

Definition:

Eine **Aussageform** ist ein Satz *mit mindestens einer Variablen*, der *für* spezielle *Einsetzungen* der Variablen *in eine Aussage übergeht.*

Beispiele:

1) „x ist ein Teiler von 24“ ist eine Aussageform. Für jede Einsetzung einer Zahl erhalten wir eine Aussage (ob sie nun wahr oder falsch ist, hängt natürlich davon ab, welche Zahl man einsetzt! Etwa „3 ist ein Teiler von 24“, wäre eine wahre Aussage.)

2) „x ist ein Teiler von y“ ist ebenfalls eine Aussageform. Es dürfen also auch mehrere Variablen vorkommen!

3) „2 + x = 7“ ist eine Aussageform. Für $x = 5$ erhalten wir eine wahre Aussage. Für jede andere Einsetzung erhalten wir eine falsche Aussage. *Insbesondere ist also jede Gleichung mit einer Variablen eine Aussageform!*

5.3 Grundmengen und Lösungsmengen von Aussageformen

5.3.1 Grundmengen von Aussageformen

Definition:

Die **Grundmenge** „$\mathbb{G}$“ einer Aussageform ist die Menge aller Zahlen, aus der die Einsetzungen „sinnvollerweise“ gewählt werden können, bzw. die Menge aller Zahlen die, von der Aufgabe aus, zum Lösen einer Gleichung zugelassen werden. (Vgl. dazu 4.3.6 auf S.37)

Im Beispiel „x ist ein Teiler von 24“, wäre etwa die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$ sinnvoll, da nur natürliche Zahlen als Teiler von 24 betrachtet werden. Bei Gleichungen hingegen ist es üblich $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ zu wählen, da für die Variable im Normalfall alle Zahlen sinnvollerweise einsetzbar sind.

ⓘ ***Ab jetzt sei*** $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ***vereinbart, wenn nichts anderes vorausgesetzt wird!***

5.3.2 Lösungsmengen von Aussageformen

Definition:

Eine **Lösung** einer Aussageform ist eine Einsetzung, für die die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht. Die **Lösungsmenge** „$\mathbb{L}$“ einer Aussageform ist die Menge aller Lösungen der Aussageform.

Im Beispiel „x ist ein Teiler von 24“, wäre etwa $\mathbb{L} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ die Lösungsmenge.

Im Beispiel „$2 + x = 7$“ hingegen, gilt $\mathbb{L} = \{5\}$.

Weitere Beispiele: Man bestimme jeweils die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Aussageformen: ✎

a) „ $5x = 7x$ “, $\mathbb{L}$ = ...

b) „ $x^2 = 0$ “, $\mathbb{L}$ = ...

c) „ y ist das kgV[1] von 9 und 12 “, $\mathbb{L}$ = ...

[1] Für die Berechnung des kgV siehe auch 19.6 auf S.170.

5.4 Der Spezialfall „Gleichungen“ & „Ungleichungen“

Wenn wir nun speziell Gleichungen betrachten, lässt sich somit zusammenfassend sagen.

Gleichungen & Ungleichungen *ohne* Variablen sind Aussagen:

Bsp.: „$3 + 5 = 4$“ ist eine falsche Aussage.

Bsp.: „$2 + 5 = 7$“ ist eine wahre Aussage.

Bsp.: „$7 > 5$“ ist eine wahre Aussage.

Bsp.: „$-21 > -15$“ ist eine falsche Aussage.

Gleichungen & Ungleichungen *mit* Variablen sind Aussageformen:

Bsp.: „$2 + x = 7$“ ist eine Aussageform mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{5\}$.

Bsp.: „ $x < 7$“ ist eine Aussageform mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} =]-\infty\,; 7[$.

Man merke sich:
Die Lösungsmenge einer Gleichung, muss nicht immer aus genau einem Element bestehen! Zum Beispiel hat die Gleichung „$x^2 = 9$“ die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung kann sogar leer sein: Für „$x + 2 = x + 5$“ gilt: $\mathbb{L} = \{\,\}$. Oder sie kann unendlich gross sein, etwa wenn jede eingesetzte Zahl eine Lösung ist. Ein Beispiel hierfür wäre „ $x + 3 = x + 3$“. Dann gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Bei Ungleichungen hingegen sind die Lösungsmengen Intervalle, wie im Bsp. „ $x < 7$“ gesehen.

Bei den obigen Gleichungen sah man die Lösungsmenge jeweils sofort. Unser Ziel ist nun auch bei Gleichungen wie etwa der Form „$5x - (3 - 5x) = 8(x + 4)$“ die Lösungsmenge anzugeben.