

6 DAS LÖSEN VON GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

6.1 Allgemeines

Beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen geht es darum, alle Werte aus der Grundmenge \mathbb{G} zu finden, die durch Einsetzung in die Lösungsvariable (in der Regel x) eine wahre Aussage ergeben. Diese Werte bilden die Lösungsmenge der (Un)Gleichung. Meistens wird man die Lösung(en) einer Gleichung nicht auf Anhieb sehen. Deshalb wird es also nötig sein, eine Gleichung oder eine Ungleichung solange umzuformen, bis man die Lösung(en) sieht. Auf dem „Weg“ dahin sollte man jedoch darauf achten, dass durch ungeschickte Umformungen weder Lösungen verloren gehen (sog. Verlustumformungen) noch neue Scheinlösungen dazukommen (sog. Gewinnumformungen). Wir werden also bemüht sein, Umformungen anzuwenden, welche die Lösungsmenge unverändert lassen. Solche Umformungen nennt man auch Äquivalenzumformungen.

6.2 Äquivalenz¹ von Gleichungen

Gleichungen (Ungleichungen), die bei **gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge** besitzen, heißen **äquivalent**. Mathematisches Zeichen: „ \Leftrightarrow “.

Beispiel: $(5 + x) \cdot 4 = 80$ ist äquivalent zu $20 + 4 \cdot x = 80$ in $\mathbb{G} = \mathbb{R}$,
da beide Gleichungen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{15\}$ haben.

6.2.1 Äquivalenzumformungen bei Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die **gleiche Zahl addiert** oder **subtrahiert**
- beide Seiten mit der **gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert** oder **dividiert**.

Eine derartige Umformung heisst **Äquivalenzumformung**.

Beispiele:

$1. \quad 2 \cdot x + 1 = 5 \quad -1$ $\Leftrightarrow 2 \cdot x = 4 \quad :2$ $\Leftrightarrow x = 2$ $\mathbb{L} = \{2\}$	$2. \quad \frac{1}{3} \cdot x - 5 = 2 \quad +5$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot x = 7 \quad \cdot 3$ $\Leftrightarrow x = 21$ $\mathbb{L} = \{21\}$
---	--

Zur Probe setzt man das Lösungselement ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht!

$2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ (wahre Aussage)}$	$\frac{1}{3} \cdot 21 - 5 = 2 \text{ (wahre Aussage)}$
---	--

¹ Äquivalenz [zu lateinisch aequivalentia „Gleichwertigkeit“]

6.3 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heisst linear, wenn die Variable nur in der ersten Potenz vorkommt und nirgends im Nenner steht. Es folgen drei Beispiele.

Beispiel 1:

$$5 - 0,5x = 3 + 0,75x \quad | + 0,5x$$

$$5 = 3 + 1,25x \quad | - 3$$

$$2 = 1,25x \quad | : 1,25$$

$$1,6 = x$$

$$\mathbb{L} = \{1,6\} \text{ falls } \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{L} = \{ \} \text{ falls } \mathbb{G} = \mathbb{N}$$

Dieses Beispiel soll unter anderem aufzeigen, dass die Lösungsmenge von der Grundmenge abhängig ist. Wie schon weiter oben erwähnt, soll ab jetzt, falls nichts anderes vorausgesetzt wird, $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ gelten.

Beispiel 2:

$$2x + 24 = 36 - x + 4 + 3x \quad | \text{ Rechte Seite zusammenfassen}$$

$$2x + 24 = 40 + 2x \quad | - 2x$$

$24 = 40$ *falsche Aussage! D.h.: Keine Zahl ergibt eingesetzt für x eine wahre Aussage. Diese Gleichung hat somit keine Lösungen!*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{ \}}}$$

Eine Gleichung die durch Äquivalenzumformungen auf eine falsche Aussage führt, hat also eine leere Lösungsmenge.

Beispiel 3:

$$12 + x - 7 = 2x + 5 - x \quad | \text{ Beide Seiten zusammenfassen}$$

$$x + 5 = x + 5 \quad | - x$$

$5 = 5$ *wahre Aussage! D.h.: Jede Zahl ergibt eingesetzt für x eine wahre Aussage und somit auch eine Lösung. (Was man bereits in der zweiten Zeile sieht.) Also:*


$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{R}}}$$


Zusammenfassend kann man also sagen:


① Eine lineare Gleichung hat entweder *genau eine Zahl* oder *keine Zahl* oder *alle Zahlen der Grundmenge* als Lösung.

Wir lösen weitere Beispiele.

① Dabei sollte man stets beachten: **Jede auf einer Seite durchgeführte Veränderung, muss auch auf der *anderen* Seite der Gleichung genauso durchgeführt werden.** (Man stelle sich etwa eine Waage im Gleichgewicht vor. Ändert sich das Gewicht auf der einen Waagschale, wird man auf der anderen Waagschale die gleiche Veränderung durchführen, um die Waage im Gleichgewicht zu behalten.)

Beispiel 4:  $4(3x - 8) - 6(5 + 4x) = 2(3x - 13)$

Beispiel 5:  $\frac{7x - 6}{4} + 3 = 2x$

Beispiel 6:  $10 - \frac{3x - 1}{2} = \frac{6x + 3}{11}$

6.4 Lineare Ungleichungen

Steht bei einer linearen Gleichung an der Stelle des Gleichheitszeichen einer der folgenden Ungleichheitszeichen „ $<$; $>$; \leq ; \geq “ spricht man von einer linearen Ungleichung. Auch zum Lösen von Ungleichungen brauchen wir *Äquivalenzumformungen*, um die Lösungsvariable zu isolieren. Jedoch können sich *diese*, von den Äquivalenzumformungen linearer Gleichungen unterscheiden, wie wir gleich sehen werden.

6.4.1 Addition oder Subtraktion desselben Terms

Ist bei Ungleichungen etwa die linke Seite grösser als die rechte Seite, so ändert sich daran nichts, wenn auf beiden Seiten dasselbe addiert oder subtrahiert wird.

Beispiel1:

$$2 > -3 \quad | +3$$

$5 > 0$ die Aussage bleibt also wahr! (entsprechend bei einer Subtraktion!)

① Wir halten fest: **Addition oder Subtraktion desselben Terms** auf beiden Seiten der Ungleichung sind Äquivalenzumformungen.

Beispiel2:

$$x + 4 \leq 10 \quad | -4$$

$x \leq 6$ somit gilt $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6\}$, oder als ¹Intervall notiert: $\mathbb{L} =]-\infty ; 6]$

Beispiel3: ✎ $2x < x + 4$

Beispiel4: ✎ $3x + 6 \geq 2x - 4$

6.4.2 Multiplikation oder Division mit demselben Term

Bei der Multiplikation oder Division mit demselben Term muss bei Ungleichungen unterschieden werden, ob der Term positiv oder negativ ist:

$7 > 5 \quad \cdot (+3)$		$8 > 4 \quad : (+2)$
$21 > 15$ wahre Aussage		$4 > 2$ wahre Aussage

¹ Vgl. dazu 4.10 auf S.43

$7 > 5 \quad \cdot (-3)$		$8 > 4 \quad : (-2)$
$-21 > -15$ <i>falsche Aussage</i>		$-4 > -2$ <i>falsche Aussage</i>
Richtig wäre: $-21 < -15$		Richtig wäre: $-4 < -2$

Bei Ungleichungen ist also das Ungleichheitszeichen umzukehren, wenn auf beiden Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird.

① Wir halten fest:

Multiplikation oder Division mit demselben *positiven* Term auf beiden Seiten der Ungleichung sind Äquivalenzumformungen.

Multiplikation oder Division mit demselben *negativen* Term auf beiden Seiten der Ungleichung sind Äquivalenzumformungen, wenn das ***Ungleichheitszeichen umgekehrt*** wird.

Es folgen einige Beispiele dazu:

Beispiel 1: $2x > 10 \quad | :2$
 $x > 5, \quad \mathbb{L} =]5; \infty[$

Beispiel 2: $-2x \geq 10 \quad | :(-2)$
 $x \leq -5, \quad \mathbb{L} =]-\infty; -5]$

Beispiel 3: $\pencil 6x + 24 < 0$

Beispiel 4: $\pencil -3x - 18 < 0$

6.5 Bruchgleichungen

Eine Bruchgleichung ist eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable x im Nenner eines Bruches oder mehrerer Brüche steht. Ein Beispiel wäre:

$$\frac{3x-2}{2x+2} = 2$$

Bei einer Bruchgleichung ist es besonders wichtig die ¹**Definitionsmenge** anzugeben. Im obigen Beispiel darf die Zahl -1 nicht für x eingesetzt werden, da sonst der Nenner Null wird. (Die Division durch Null ist nach wie vor nicht definiert! Siehe 2.2.5.2 auf S.12.) Alle andere Zahlen sind hingegen erlaubt. **Wir müssen** also **-1 aus der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ ausschliessen**. Es gilt:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Um die Nenner wegzuschaffen, multipliziert man die Bruchgleichung mit dem ²Hauptnenner (=HN). Hier also mit $\text{HN} = 2x+2$.

$$\frac{3x-2}{2x+2} = 2 \quad | \cdot (2x+2)$$

$$3x-2 = 2(2x+2) \quad | \text{ Die Klammern bei } (2x+2) \text{ sind notwendig!}$$

$$3x-2 = 4x+4 \quad | -3x$$

$$-2 = x+4 \quad | -4$$

$$-6 = x \quad (\text{Kontrolle durch Einsetzen: } \frac{-20}{-10} = 2) \text{ O.k.}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-6\}}}$$

Wie wichtig es ist, die Definitionsmenge anzugeben, soll das nächste Beispiel illustrieren.

Beispiel2: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\text{HN} = (x-3)$

$$1 + \frac{6}{x-3} = 2 + \frac{2x}{x-3} \quad | \cdot (x-3)$$

$$(x-3) + 6 = 2(x-3) + 2x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$x+3 = 4x-6 \quad | +6 \quad | -x$$

$$9 = 3x \quad | :3$$

¹ Vgl. dazu 4.3.6 auf S.37 und 4.6 auf S.39

² Vgl. dazu 19.6 auf S.170

$x=3$ ❶...Doch **3** ist *nicht in der Definitionsmenge* enthalten; und somit bestimmt keine Lösung der Bruchgleichung! Es handelt sich hier um eine sogenannte **Scheinlösung**. Da der einzige Lösungskandidat eine Scheinlösung ist, ist die Lösungsmenge leer! $\underline{\underline{= \{ \}}}$.

Wie konnte eine solche Scheinlösung entstehen? Nun in der ersten Zeile haben wir mit $(x-3)$ multipliziert. Für den speziellen Wert $x=3$ würden wir also an dieser Stelle mit Null multiplizieren, und das ist keine Äquivalenzumformung!

Es folgen zwei weitere Beispiele:

Beispiel3: ✎
$$\frac{x-4}{x-1} + \frac{3x-5}{5x-5} = 2 - \frac{5x-1}{7x-7}$$

Beispiel4: ✎
$$\frac{6(x-2)}{2x-4} = 3$$

6.6 Bruchungleichungen

Bruchungleichungen sind durch Umformungen komplizierter und aufwändiger zu lösen als Bruchgleichungen. Weil der Rechenaufwand gross ist und wir später eine elegantere (grafische) Methode kennenlernen werden (siehe später 16.7 „Quadratische Ungleichungen“ auf S.139), verzichten wir an dieser Stelle auf algebraische Lösungsmethoden von Bruchungleichungen. Es soll jedoch aufgezeigt werden, worin die Problematik bei solchen Aufgaben liegt.

Dies wird anhand eines Beispiels illustriert:

$\frac{3}{x-1} > 5$ ist eine Bruchungleichung mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\text{HN} = (x-1)$

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad | \cdot \text{HN} = (x-1)$$

①...Und an dieser Stelle taucht ein Problem auf. Ist der **HN positiv oder negativ**? Ist er **positiv bleibt** das **Ungleichheitszeichen**; ist er **negativ** müssen wir das **Ungleichheitszeichen umkehren**. Diese Überlegung zwingt uns an dieser Stelle zu einer sog. „Fallunterscheidung“:

Fall 1: Für $\underline{x > 1}$ ist der HN positiv

Fall 2: Für $\underline{x < 1}$ ist der HN negativ

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad | \cdot \text{HN} = (x-1)$$

$$\frac{3}{x-1} > 5 \quad | \cdot \text{HN} = (x-1)$$

$$3 > 5(x-1)$$

$$3 < 5(x-1)$$

$$3 > 5x - 5$$

$$3 < 5x - 5$$

$$8 > 5x$$

$$8 < 5x$$

$$\underline{1.6 > x}$$

$$\underline{1.6 < x}$$

Wir fassen zusammen:

Im Fall 1 haben wir: $\underline{x > 1}$ **und** $\underline{1.6 > x}$. Dies ergibt das Intervall: $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1.6\}$ (Falls man Mühe hat, dies einzusehen, könnte eine grafische Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl weiterhelfen).

Im Fall 2 haben wir: $\underline{x < 1}$ **und** $\underline{1.6 < x}$. Da keine Zahl x beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, gilt: $\mathbb{L}_2 = \{ \}$.

(Falls man Mühe hat, dies einzusehen, könnte eine grafische Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl weiterhelfen).

Die Gesamtlösung ergibt sich als Vereinigung der beiden Teillösungen:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1.6\}$$

Dies war noch eine relativ „harmlose“ Bruchungleichung. Kommen mehrere Brüche vor, steigt der Rechenaufwand entsprechend.

6.7 Produkte die Null sind. Ein Spezialfall von Gleichungen.

Frage: Wann ist ein Produkt verschiedener Faktoren Null? „ $a \cdot b \cdot c = 0$ “

Antwort:

Ein Produkt verschiedener Faktoren ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist! Also: „ $a \cdot b \cdot c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$ “

Mit dieser Überlegung lassen sich nun bei speziellen Gleichungen (nämlich Gleichungen mit einem Produkt auf der linken Seite und Null auf der rechten Seite), die Lösungen zum Teil sofort ablesen. Wir illustrieren das am folgenden Beispiel:

Beispiel 1: Man bestimme die *vollständige* Lösungsmenge der folgenden Gleichung: $x \cdot (x - 5) = 0$

Mit der obigen Überlegung wird die linke Seite Null, wenn der erste Faktor x gleich Null ist, oder wenn der zweite Faktor $(x - 5)$ gleich Null wird. Dies ergibt zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$. Somit ist $\underline{\underline{L}} = \{0; 5\}$

①...Wie im alltäglichen Leben gibt es auch in der Mathematik Irrwege und Sackgassen.

Irrweg: Beide Seiten der Gleichung durch x dividieren ergibt $x - 5 = 0$ und somit die Lösung $x = 5$. Die zweite Lösung $x = 0$ wurde damit vernachlässigt. Die **Division durch die Lösungsvariable** ist somit eine sog. „**Verlustumformung**“ und keine Äquivalenzumformung!

Beispiel 2: ✍ Man bestimme die *vollständige* Lösungsmenge der Gleichung: $x \cdot (12x + 96) = 0$

Beispiel 3: ✍ $3x \cdot (4 + x)(16 - 5x)(16x + 24) = 0$

Durch Ausmultiplizieren der linken Seite käme man auf eine komplizierte Gleichung vierten Grades! Dies wäre eine klassische **Sackgasse** in der Mathematik. Also muss es anders gehen! Wir wissen wie:

Beispiel 4: ✍ $x^2 + 9x + 20 = 0$

Mit den obigen Überlegungen kann man diese „geeignete“ quadratische Gleichung durch Faktorisieren lösen! (Mit „geeignet“ meint man hier, dass sich der Term mit der Probiermethode faktorisieren lässt.):

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad | \text{ faktorisieren}$$

$$(\quad)(\quad) = 0$$

7 WURZELN UND POTENZEN

7.1 Die Quadratwurzel

7.1.1 Ein praktisches Problem aus der Geometrie

Wir haben ein Quadrat mit Flächeninhalt 4cm^2 und möchten wissen wie lange die dazugehörige Seite ist. Antwort: 2cm . (Denn $2\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 4\text{cm}^2$)

4cm^2

Nun haben wir ein Quadrat mit Flächeninhalt 10cm^2 . Antwort: Es ist nötig, eine neue Rechenoperation einzuführen, das Wurzelziehen (auch Radizieren genannt).

Das Ergebnis lautet dann: $\sqrt{10}\text{cm}$. (Denn $\sqrt{10}\text{cm} \cdot \sqrt{10}\text{cm} = 10\text{cm}^2$)

7.1.2 Die Definition der Quadratwurzel

Definition¹


Die Quadratwurzel einer *positiven* Zahl a ist diejenige *positive* Zahl, die mit sich selber multipliziert a ergibt.

Konkret: $\sqrt{10}$ ist die (*positive*) Zahl, die mit sich selbst multipliziert 10 ergibt.

($\sqrt{10} = + 3.16227766016837933199889354\dots$)

Bemerkungen:

- Den Ausdruck unter einer Wurzel nennt man Radikand. Im obigen Beispiel $\sqrt{10}$ wäre also 10 der Radikand.
- Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert und kann somit nicht gezogen werden. ($\sqrt{-4} = ?$ (Es gibt keine reelle Zahl die mit sich selbst multipliziert -4 ergibt. Dies leuchtet hoffentlich ein! Denn Quadratzahlen sind immer positiv: " $-$ " \cdot " $-$ " = " $+$ ")
- Alle Quadratwurzeln, deren Radikand nicht ausschliesslich Quadratzahlen enthält, sind irrationale Zahlen, d.h. sie sind nicht-periodisch und nicht-abbrechend.

Beispiele 	richtig	falsch	Bemerkungen
$\sqrt{36} = -6$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$-\sqrt{49} = -7$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\sqrt{-36} = -6$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\sqrt{-49} = 7$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\sqrt{64} = \pm 8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\sqrt{81} = 9$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

¹ Das Zeichen „ $\sqrt{\quad}$ “ erinnert an den Buchstaben r für lateinisch *radix* („Wurzel“).

Bemerkungen

① Es ist wichtig, dass Sie verstehen, dass $\sqrt{36}$ **nicht -6 ist, sondern $+6$ ist!** Auch wenn beide Zahlen mit sich selbst multipliziert 36 ergeben, fordert die Definition diejenige *positive* Zahl, die mit sich selber multipliziert 36 ergibt, also die *eindeutige* Zahl 6.

Wäre das nicht der Fall; könnten Sie für $\sqrt{36}$ wahlweise einmal -6 und einmal $+6$ schreiben, so würde die ganze Mathematik in sich zusammenfallen. Dann könnten Sie Schwachsinniges beweisen wie etwa: $\underline{1} = 7 - 6 = 7 - \sqrt{36} = 7 - (-6) = \underline{13}$...und gerade deshalb haben die Mathematiker Vorsichtsmassnahmen getroffen und die Quadratwurzel entsprechend definiert!

Kurz gesagt gilt:

$$\sqrt{36} = 6$$

$$-\sqrt{36} = -6.$$

$$\sqrt{-36} \text{ ist nicht definiert!}$$

Zwei abschliessende „spezielle“ Zahlenbeispiele: $\sqrt{0} = 0$ und $\sqrt{1} = 1$

7.1.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln

- $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$
- $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ Die Wurzel kann bei einer Summe NICHT summandenweise gezogen werden! (Gegenbeispiel: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ jedoch $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$)


Zwei Beispiele dazu: 

1) Sommerferien! Sie sitzen am Strand, haben keinen Taschenrechner dabei, jedoch eine Zeitschrift mit der folgenden Knobelaufgabe $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = ?$ AHA! Sagen Sie sich...und schreiben mit dem Finger in den Sand:
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$

2) Dasselbe für $\sqrt{\frac{25}{4}} =$

7.2 Rechnen mit n-ten Wurzeln

Aus einer Zahl kann man auch die dritte, vierte, oder ganz allgemein die n-te Wurzel ziehen.

Was vermuten Sie, beträgt $\sqrt[3]{8}$? 

7.2.1 Die Definition der n-ten Wurzel

Definition

Die n-te Wurzel aus einer *nichtnegativen* Zahl a ist diejenige *nichtnegative* Zahl w, deren n-te Potenz gleich a ist. $\sqrt[n]{a} = w \Leftrightarrow w^n = a$

Beispiele:

1) $\sqrt[4]{16} = 2$, da $2^4 = 16$

2) $\sqrt[3]{27} = 3$, da $3^3 = 27$

3) $\sqrt[3]{-8} \neq -2$, obwohl $(-2)^3 = -8$ ist, ist der Ausdruck $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert. (Da Wurzeln *nur* für *nichtnegative Radikanden* definiert sind.) Der Grund dieser Einschränkung ist, dass später im Zusammenhang mit den sog. Potenzregeln ansonsten Widersprüche auftreten würden¹.

4) $\sqrt[n]{1} = 1$, da $1^n = 1$, für $n = 2, 3, 4, \dots$

7.2.2 Rechenregeln für n-te Wurzeln

- $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$

- $\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$

Bemerkungen:

Für $\underline{n = 2}$ hat man eine Quadratwurzel. In diesem Fall schreibt man die 2 über der Wurzel nicht hin.

Bei $\underline{n = 3}$ spricht man auch von Kubikwurzeln.

Natürlich gilt auch hier: **Die Wurzel kann bei einer Summe NICHT summandenweise gezogen werden!**

¹ Wir werden später (siehe 7.3.4. auf S.62) die Beziehung $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ einführen. Wären negative Radikanden erlaubt, liesse sich das folgende widersprüchliche Beispiel konstruieren: $\underline{-2} = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \underline{2}$

7.3 Rechnen mit Potenzen

7.3.1 Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten

Definition:

Für jede reelle Zahl a und natürliche Zahl n heisst: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{Produkt aus } n \text{ Faktoren } a}$ die **n -te Potenz von a** .
 Dabei nennt man a die *Basis* und n den *Exponent*.

Beispiele:

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = -1000 \qquad (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

$$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16 \qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

① Man beachte den Unterschied der letzten zwei Beispiele. Setzt man keine Klammern um „-2“, folgt aus der Regel „Punkt vor Strich“ das Resultat -16 ; im Gegensatz zu $(-2)^4 = 16$.

7.3.2 Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Wir fragen uns, wie man Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten definieren soll. Konkret: Was sollen 2^{-2} , oder 10^{-1} , oder ganz allgemein a^{-n} für einen Wert erhalten?

Wir stellen die folgende Überlegungen an:

- Jedes mal wenn wir eine Potenz a^n durch die Basis a teilen, vermindert sich der Exponent n um eins.

$$\dots \rightarrow a^3 \xrightarrow{:a} a^2 \xrightarrow{:a} a^1 \xrightarrow{:a} a^0 \xrightarrow{:a} a^{-1} \xrightarrow{:a} a^{-2} \rightarrow \dots$$

- Andererseits können wir bei jeder Division durch a einen Faktor aus $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ kürzen.

$$\dots \rightarrow a \cdot a \cdot a \xrightarrow{:a} a \cdot a \xrightarrow{:a} a \xrightarrow{:a} 1 \xrightarrow{:a} \frac{1}{a} \xrightarrow{:a} \frac{1}{a \cdot a} \rightarrow \dots$$

Vergleichen wir nun die entsprechenden Positionen erhalten wir:

$$\boxed{a^3 = a \cdot a \cdot a}, \quad \boxed{a^2 = a \cdot a}, \quad \boxed{a^1 = a}, \quad \boxed{a^0 = 1}, \quad \boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}, \quad \boxed{a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}}.$$

Die folgende Definition scheint also Sinn zu machen (solange natürlich im Nenner für a nicht Null steht).

Definition:

Für $a \neq 0$ wird vereinbart: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Beispiele dazu:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{27}} = 27$$

✍ $109^0 =$	✍ $(-2)^{-4} =$	✍ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} =$
-------------	-----------------	-------------------------------------

Eine abschliessende Bemerkung: **Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.** Begründung:

Aus $4^0 = 1$; $3^0 = 1$; $2^0 = 1$; $1^0 = 1$; ... würde sich für 0^0 der Wert **1** ergeben!

Aus $0^4 = 0$; $0^3 = 0$; $0^2 = 0$; $0^1 = 0$; ... würde sich für 0^0 der Wert **0** ergeben!

7.3.3 Rechenregeln für Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten

Wir geben jeweils zuerst die Rechenregel an, gefolgt von einem Beweis zur Begründung, und einem Zahlenbeispiel zur Illustration. Am Ende des Kapitels folgt eine Zusammenstellung aller Regeln.

7.3.3.1 Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis

Regel: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Beweis: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$

Zahlenbeispiel: $7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$

7.3.3.2 Division zweier Potenzen mit gleicher Basis

Regel: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

¹Beweis: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}^{m \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} = \dots n - \text{mal kürzen} \dots = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}^{(m-n) \text{ Faktoren}}}{1} = a^{m-n}$

Zahlenbeispiel: $\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2^3 = 2^{7-4}$

Ein weiteres Zahlenbeispiel: $\frac{2^4}{2^7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = 2^{4-7}$

¹ Wir haben hier den Beweis für den Fall $m > n$ durchgeführt. Für den Fall $m < n$ geht er analog. (Siehe zweites Zahlenbeispiel.)

7.3.3.3 Multiplikation zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

Regel: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Beweis: $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ Faktoren } ab} = (ab)^n$

Zahlenbeispiel: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$

7.3.3.4 Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten

Regel: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Beweis: $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n\text{-mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Zahlenbeispiel: $\frac{3^4}{8^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^4$

7.3.3.5 Potenz einer Potenz

Regel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Beweis: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \cdot m \text{ Faktoren } a} = a^{m \cdot n}$

Zahlenbeispiel: $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$

7.3.3.6 Zusammenstellung der Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten

Mit Berücksichtigung der Vereinbarungen: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ gelten für beliebige ganzzahlige Exponenten die folgenden **Potenzregeln**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ und $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

3. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$

Wir schliessen diese Zusammenstellung mit drei wichtigen Bemerkungen ab:

- ① Für die **Addition** bzw. **Subtraktion von Potenzen** gibt es **keine Rechenregeln**.

$$\boxed{2^2 + 2^3 \neq 2^{2+3} \quad (\text{links steht } 12; \text{ rechts steht } 32)}$$

- ① Für die **Multiplikation** bzw. **Division von Potenzen mit verschiedenen Basen und verschiedenen Exponenten** gibt es ebenfalls **keine Rechenregeln**.

$$\boxed{a^3 b^2 \text{ lässt sich nicht weiter verrechnen.}}$$

- ① Auch bei Potenzen spielen **Klammern** eine **wichtige Rolle**, welche vernachlässigt, falsche Aussagen liefern. Der folgende Fall sorgt oft für Verwirrung. Um Klarheit zu schaffen, merke man sich: **Eine Potenz bindet stärker als eine Multiplikation!**

$$\boxed{2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256} \quad \text{hingegen ist} \quad \boxed{(2^2)^3 = 4^3 = 64.}$$

7.3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir fragen uns, wie man Potenzen mit einem Bruch als Exponent definieren soll. Konkret: Was soll man unter $10^{\frac{1}{2}}$, oder $2^{\frac{2}{3}}$, oder ganz allgemein unter $a^{\frac{m}{n}}$ verstehen?

① Wir suchen nach einer „sinnvollen“ Definition, welche unsere bisherigen Potenzregeln berücksichtigt, und auch sonst keine Widersprüche zur übrigen Mathematik aufweist. (Etwa so, wie wir bei negativen Exponenten $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ definiert haben.)

Wir stellen dazu die folgende Überlegungen an, dabei sollen die bisherigen Potenzgesetze gelten:

- Weil uns das Rechnen mit Wurzeln vertraut ist, wissen wir:

$$\boxed{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 8}$$


- Gleichzeitig betrachten wir:

$$\boxed{8^2 \cdot 8^2 \cdot 8^2 = 8^1} \quad \text{nach „Potenzregel 1.“ hiess das: } 8^{2+2+2} = 8^1 \Rightarrow ? = \frac{1}{3}. \quad \text{Also:}$$

$$\boxed{8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8} \quad \text{Ein Vergleich liefert die Beziehung: } \boxed{8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}}.$$

Es ist daher sinnvoll $\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$ **zu setzen, oder allgemein:** $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$.

Beispiel 1: Unter $10^{\frac{1}{2}}$ verstehen wir ab jetzt den Ausdruck $\sqrt[2]{10}$ also $\sqrt{10}$.

Beispiel 2:  $2^{\frac{1}{3}} =$

Die Definition für den Ausdruck „ $a^{\frac{m}{n}}$ “ ist an dieser Stelle naheliegend, wie die folgende Überlegung aufzeigt:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$


Somit definieren wir $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Definitionen:

Für $a \geq 0$ und natürliche Zahlen n und m ist

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{und} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$


① Potenzen lassen sich somit als Wurzeln schreiben und umgekehrt Wurzeln als Potenzen.

Beispiel 1:  Man schreibe mit Wurzeln.

$$7^{\frac{4}{3}} =$$

$$4^{\frac{11}{33}} =$$

$$b^{\frac{5}{6}} =$$

Beispiel 2:  Man schreibe als Potenz.

$$\sqrt[3]{5^6} =$$

$$(\sqrt[5]{7})^4 =$$

$$\sqrt[7]{x^3} =$$

Beispiel 3:  Man berechne ohne Taschenrechner.

$$27^{\frac{1}{3}} =$$

$$125^{\frac{1}{3}} =$$

$$4^{\frac{1}{2}} =$$

8 WURZELGLEICHUNGEN

Wenn die Lösungsvariable x unter der Wurzel vorkommt, spricht man von einer Wurzelgleichung. Es folgen drei Beispiele für Wurzelgleichungen.

Beispiele:

- 1) $\sqrt{x} = 2$
- 2) $\sqrt{x+104} = \sqrt{x} + 8$
- 3) $\sqrt{x^2 + 8x + 8} - \sqrt{2x + 3} = 0$

Bemerkungen:

- Auch bei Wurzelgleichungen ist unser Ziel, alle Zahlen zu finden, die die Gleichung erfüllen; also alle Zahlen, die eingesetzt in die Gleichung, eine wahre Aussage ergeben.
- Streng genommen, müsste man (wie etwa bei Bruchgleichungen) zunächst die Definitionsmenge bestimmen. (Der Ausdruck unter der Wurzel darf bekanntlich nicht negativ sein!) Da dies bei Wurzelgleichungen aber sehr umständlich sein kann (vgl. Bsp. 3)), macht man das in der Praxis anders: Man löst zuerst die Gleichung nach x auf und setzt dann die gefundenen Lösungen in die Gleichung ein, um zu sehen, ob diese zur Definitionsmenge gehören.
- Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Es können durch das Quadrieren neue Lösungen (sog. Scheinlösungen entstehen.) (Vgl. dazu 9.2.2 auf S.67). Die Schlusskontrolle durch Einsetzen der Lösungen ist bei Wurzelgleichungen also notwendig!

Lösungen der Beispiele:

1) $\sqrt{x} = 2$ Wir quadrieren links und rechts und erhalten $x = 4$.

Wir setzen in die Gleichung ein: $\sqrt{4} = 2$ O.k.! Somit lautet die Lösungsmenge: $\underline{\mathbb{L}} = \{4\}$.

2) $\sqrt{x+104} = \sqrt{x} + 8$ Hier können wir die Wurzeln nicht noch besser isolieren. Also quadrieren wir ein erstes Mal: $(\sqrt{x+104})^2 = (\sqrt{x} + 8)^2$.

Da wir auf der rechten Seite das Quadrat einer Summe haben, müssen wir die erste binomische Formel anwenden. (Das Doppelprodukt dabei nicht vergessen!)

Das ergibt: $x + 104 = x + 16\sqrt{x} + 64$.

Wir isolieren die Wurzel: $\sqrt{x} = \frac{40}{16}$. Wir kürzen (wie gewohnt) den Bruch: $\sqrt{x} = \frac{5}{2}$.

Jetzt quadrieren wir links und rechts und erhalten: $x = \frac{25}{4}$. Dafür können wir auch $x = 6.25$ schreiben. Wir setzen in die Gleichung ein (mit TR, oder von Hand): O.k. ! Somit lautet die Lösungsmenge: $\underline{\mathbb{L}} = \{6.25\}$

Bevor wir das dritte Beispiel lösen, geben wir zunächst ein allgemeines Lösungsrezept an:

Allgemeines Lösungsrezept:

1. **Wurzel isolieren** und durch Quadrieren **beseitigen** (eventuell mehrmals durchzuführen, wie etwa im Bsp.2.);
2. die so entstandene **Gleichung ohne Wurzeln lösen**;
3. gefundene **Lösungen** durch Einsetzen **überprüfen**.

3) Würden wir die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + 8x + 8} - \sqrt{2x + 3} = 0$$

quadrieren, müssten wir für die linke Seite die 2. Binomische Formel anwenden und wir hätten ein Doppelprodukt von Wurzeltermen und somit die Wurzeln noch nicht beseitigt! Also zuerst umordnen:

$$\sqrt{x^2 + 8x + 8} = \sqrt{2x + 3}.$$

Jetzt können wir quadrieren; die Wurzeln verschwinden:

$$x^2 + 8x + 8 = 2x + 3.$$

Nach entsprechender Umformung erhalten wir eine quadratische Gleichung: $x^2 + 6x + 5 = 0$. Um die Lösungen zu bestimmen, faktorisieren wir die linke Seite: $(x + 1)(x + 5) = 0$. Wir können die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -5$ ablesen (vgl. 6.7 auf S.55). Wir setzen in die Gleichung ein (mit TR, oder von Hand):

$$\sqrt{(-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 8} - \sqrt{2 \cdot (-1) + 3} = \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0; \quad -1 \text{ ist } \mathbf{Lösung}.$$

$\sqrt{(-5)^2 + 8 \cdot (-5) + 8} - \sqrt{2 \cdot (-5) + 3} = \sqrt{-7} - \sqrt{-7}$; -5 gehört **nicht** zur Definitionsmenge und ist also nur eine **Scheinlösung**.

Somit gilt: $\underline{\mathbb{L}} = \{-1\}$.

Zwei Bemerkungen:

Um die Entstehung sog. Scheinlösungen besser zu verstehen, scheint an dieser Stelle eine Zusammenstellung von den bereits angetroffenen Gewinn- und Verlustumformungen angebracht. Dies erfolgt im *nächsten Kapitel*.

Wir sind im obigen Beispiel einmal mehr auf eine quadratische Gleichung gestossen: „ $x^2 + 6x + 5 = 0$ “. Mit geschicktem Faktorisieren konnten wir diese Gleichung lösen. Wie gehen wir jedoch vor, wenn eine quadratische Gleichung der Form $3x^2 - 117x + 5013 = 0$, oder gar der Form $x^2 + 3.17x - \sqrt{77} = 0$ vorliegt? Es ist höchste Zeit, dass wir quadratische Gleichungen etwas genauer unter die Lupe nehmen! Dies erfolgt im *übernächsten Kapitel*.

9 GEWINN- UND VERLUSTUMFORMUNGEN

Wenn sich bei einer Gleichung durch eine Umformung die *Lösungsmenge nicht ändert*, spricht man von *Äquivalenzumformungen*. Zur Erinnerung:

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die **gleiche Zahl addiert** oder **subtrahiert**;
- beide Seiten mit der **gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert** oder **dividiert**.

In den letzten Kapiteln (und wie wir sehen werden auch in den nächsten) haben wir gesehen (werden wir sehen), dass durch „gewisse Umformungen“ jedoch Lösungen verloren gehen können (= *Verlustumformung*), oder gar Scheinlösungen auftreten können (= *Gewinnumformung*).

① Man muss also stets auf der Hut sein, wenn man nebst den obengenannten Äquivalenzumformungen beim Lösen von Gleichungen noch weitere Umformungen wie Wurzelziehen, Quadrieren, teilen durch die Lösungsvariable, etc... anwendet.

9.1 Verlustumformungen

9.1.1 Division durch die Lösungsvariable

① Die Division durch die Lösungsvariable (oder durch einen Term, der die Lösungsvariable enthält) kann eine Verlustumformung sein.

Beispiel: $2x^2 = 4x \quad | : x$ (dabei würde die Lösung $x=0$ verloren gehen. **Deshalb $x_1=0$ vormerken**)
 $2x = 4 \quad | : 2$
 $x_2 = 2$, somit gilt $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0; 2\}}}$

9.1.2 Wurzelziehen auf beiden Seiten einer Gleichung

① Das Wurzelziehen auf beiden Seiten einer Gleichung kann eine Verlustumformung sein.

Beispiel: $x^2 = 36 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = 6$ dabei ist die Lösung $x = -6$ verloren gegangen!

Aus diesem Grund führt man die folgende **Regel** ein:

① Zieht man bei einer Gleichung auf beiden Seiten die Wurzel, so ist auf einer Seite die positive **und** die negative Wurzel zu ziehen. $\boxed{\pm \sqrt{\quad}}$

Also: $x^2 = 36 \quad | \pm \sqrt{\quad}$
 $x = \pm \sqrt{36} = \pm 6$, $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{6; -6\}}}$

Es sei an dieser Stelle einmal mehr betont, dass $\sqrt{36}$ nach Definition diejenige *positive* Zahl ist, die mit sich selber multipliziert 36 ergibt, also *eindeutig die Zahl 6*. Der Ausdruck $\sqrt{36} = -6$ ist falsch!

Beachten Sie bitte den Unterschied zu $-\sqrt{36} = -6$. Das Minuszeichen steht **vor** der Wurzel. Die Wurzel aus 36 bleibt jedoch nach wie vor die Zahl 6. (Vgl. dazu 7.1.2 auf S.56)

9.2 Gewinnumformungen

9.2.1 Multiplikation mit einem Term der die Lösungsvariable enthält

Wir greifen das folgende Beispiel aus Kapitel 6.5 (S.52) wieder auf:

$$\begin{array}{l|l}
 1 + \frac{6}{x-3} = 2 + \frac{2x}{x-3} & \cdot (x-3) \\
 (x-3) + 6 = 2(x-3) + 2x & \text{zusammenfassen} \\
 x + 3 = 4x - 6 & +6 \quad | \quad -x \\
 9 = 3x & :3 \\
 \underline{x = 3} &
 \end{array}$$

① ...Doch 3 ist keine Lösung der Bruchgleichung. Durch die Multiplikation mit dem Term $(x-3)$ ist eine *Scheinlösung* entstanden. Deshalb sollte man **bei Bruchgleichungen die Definitionsmenge stets angeben!** Wir holen das jetzt nach: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Es gilt also: $\underline{\underline{= \{ \}}}$.

9.2.2 Quadrieren einer Gleichung¹

Wir betrachten zwei Beispiele dazu:

Beispiel 1:

$$\begin{array}{l|l}
 \sqrt{2-x} = \sqrt{x-8} & \text{quadrieren} \\
 2-x = x-8 & +x \quad | \quad +8 \\
 10 = 2x & :2 \\
 \underline{5 = x} &
 \end{array}$$

Kontrolle durch Einsetzen:

$\sqrt{-3} = \sqrt{-3}$ dieser Ausdruck ist nicht definiert! 5 ist eine Scheinlösung. $\underline{\underline{= \{ \}}}$.

Folgerung:

① Beim Quadrieren von Gleichungen können 2 Arten von Scheinlösungen auftreten:

I. Lösungen, für die die Wurzel(n) nicht definiert ist (sind). (*Beispiel 1*)

II. Lösungen, die die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. (*Beispiel 2*)

⇒ Die Schlusskontrolle MUSS beim Quadrieren einer Gleichung gemacht werden!

¹ Vgl. dazu auch Kapitel 8 Wurzelgleichungen auf S.64

10 QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Quadratische Gleichungen sind grob gesagt Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Quadrat vorkommt. Ein Beispiel wäre: „ $3x^2 + 8x - 7 = 0$ “ Nicht alle quadratische Gleichungen sind gleich schwierig zu lösen, wie wir zum Teil bereits gesehen haben und noch sehen werden...

10.1 Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wobei $a \neq 0$, b und c reelle Zahlen sind. Mit „ x “ ist die unbekannte Grösse gemeint.

Die Zahlen a , b und c werden auch **Koeffizienten** genannt. Im Beispiel $3x^2 + 8x - 7 = 0$ wären also die entsprechenden Koeffizienten: $a = 3$; $b = 8$; $c = -7$.

Es wird $a \neq 0$ vorausgesetzt, da sonst für $a=0$ die lineare Gleichung „ $bx + c = 0$ “ gegeben wäre.

10.2 Sonderfälle von quadratischen Gleichungen

Wir betrachten zunächst Sonderfälle von quadratischen Gleichungen, die besonders einfach zu lösen sind. Dann werden wir mit einem „Trick“, der sog. „quadratischen Ergänzung“ auch anspruchsvollere quadratische Gleichungen lösen, und schliesslich werden wir eine Lösungsformel herleiten, mit der sich die Lösungen direkt berechnen lassen.

10.2.1 Die reinquadratische Gleichung

Ist $b = 0$, fehlt also das sogenannte lineare Glied „ bx “, dann spricht man von einer **reinquadratischen Gleichung**. Sie hat die allgemeine Form $ax^2 + c = 0$.

In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die Form „ $x^2 = \dots$ “ bringen. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad | + 8$$

$$2x^2 = 8 \quad | : 2$$

$$x^2 = 4 \quad | \pm \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 2$$


$$\underline{\underline{L = \{2; -2\}}}$$

Beispiel 2:

$$x^2 + 16 = 0 \quad | - 16$$

$$x^2 = -16 \quad | \pm \sqrt{\quad} \text{ nicht definiert!}$$

$$\underline{\underline{L = \{\}}}$$

Beispiel 3:  $3x^2 - 5 = 1$

10.2.2 Leicht faktorisierebare quadratische Gleichungen

Wir erinnern uns an das Kapitel 6.7 „Produkte die Null sind“ auf S.55 und greifen das Beispiel $x^2 + 9x + 20 = 0$ wieder auf. Wir faktorisieren die linke Seite und können dann die Lösungen sofort ablesen:

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$(x + 4)(x + 5) = 0$$

$$x_1 = -4 ; x_2 = -5$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-4 ; -5\}}}$$

Es folgen vier weitere Beispiele dazu: 

Beispiel 1: $5x^2 - 3x = 0$

Beispiel 2: $2x = 4x^2$

Beispiel 3: $x^2 + 4x + 4 = 0$

Beispiel 4: $x^2 - 6x = -5$

10.2.3 Quadratisches Ergänzen

Wir betrachten das Beispiel

$$x^2 + 2x + 1 = 3.$$

Mit den bisherigen Methoden kommt man auf den ersten Blick nicht weiter. Subtrahieren wir 3 auf beiden Seiten lässt sich die Gleichung $x^2 + 2x - 2 = 0$ nicht wie bis anhin mit der Faktorisierungsmethode auflösen. Auf den zweiten Blick erkennt man auf der linken Seite eine binomische Formel!

$$x^2 + 2x + 1 = 3 \quad | \quad \textit{links steht (zum Glück) eine binomische Formel}$$

$$(x + 1)^2 = 3 \quad | \quad \pm \sqrt{\quad}$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{3} \quad | \quad -1$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.732; \quad x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.732$$

$$\underline{\mathbb{L}} = \{0.732; -2.732\}$$

① Das bedeutet: Wenn auf der einen Seite eine binomische Formel (also ein Quadrat) steht, kann eine quadratische Gleichung durch Wurzelziehen „ $\pm \sqrt{\quad}$ “ gelöst werden.

Ein weiteres Beispiel dazu: 

$$(x - 1)^2 = 9$$

Eine Frage drängt sich nun auf:

Was machen wir, wenn keine binomische Formel vorkommt?

Antwort:

Dann stellen wir eine her!

Wie das gehen soll, illustrieren wir am folgenden Beispiel:

Beispiel:

$$x^2 + 10x - 13 = 0 \quad | + 13$$

$$x^2 + 10x = 13 \quad | + 25 \quad (\dots \text{damit wir links die binomische Formel } (x + 5)^2 \text{ herstellen können!})$$

$$x^2 + 10x + 25 = 38$$

$$(x + 5)^2 = 38 \quad | \pm \sqrt{} \quad (\text{so weit wollten wir ja kommen! Das war's!})$$

$$x + 5 = \pm \sqrt{38}$$

$$x_1 = -5 + \sqrt{38} \approx 1.164; \quad x_2 = -5 - \sqrt{38} \approx -11.164$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{1.164; -11.164\}}}$$

① Man nennt das "Herstellen" von binomischen Formeln eine **quadratische Ergänzung**.

Dazu eine kleine Übung: Man ergänze die folgenden Ausdrücke zu einem Quadrat. Welche Zahl muss man jeweils dazuzählen? 

a) $x^2 + 4x + \dots = (x + \dots)^2$

b) $x^2 - 14x + \dots = (x - \dots)^2$

c) $x^2 + 3x + \dots = (x + \dots)^2$

d) Die Zahl, die dazuzuzählen ist, erhalten wir also mit der allgemeinen Regel:

„Den Koeffizient von x und anschliessend“

Wir können nun also quadratische Gleichungen mit quadratischem Ergänzen auflösen. Dabei haben wir es stets mit konkreten Zahlen als Koeffizienten zu tun. Die gleiche Rechnung können wir aber auch durchführen, ohne uns auf bestimmte Zahlen festzulegen. Wir ersetzen die Zahlen durch Buchstaben und führen die Überlegungen des letzten Kapitels ganz allgemein durch, und zwar ein für alle Mal.

Das bringt zwei Resultate: Zum einen haben wir dann eine Lösungsformel zur Verfügung. Sie erlaubt uns, die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu finden, ohne jedes Mal quadratisch ergänzen zu müssen. Und noch etwas: Wir können anhand der Koeffizienten einer quadratischen Gleichung im voraus entscheiden, wie viele Lösungen sie haben wird: zwei, eine oder keine.

10.2.4 Lösungsformel und Lösbarkeit

Wir legen uns nicht auf konkrete Koeffizienten fest, sondern rechnen mit Buchstaben. Dazu gehen wir von folgender Gleichung aus:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

Wir nehmen also an, dass die Gleichung in allgemeiner Form gegeben ist.

Beginnen wir die Rechnung: Wir bereiten durch zwei kleine Umformungen das quadratische Ergänzen vor:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & | -c \\ ax^2 + bx &= -c & | :a \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Um nun quadratisch zu ergänzen, addieren wir auf beiden Seiten $\frac{b^2}{4a^2}$ ($\frac{b}{a}$ durch 2 teilen und quadrieren) und schreiben die linke Seite als Quadrat. Die rechte Seite schreiben wir über einen gemeinsamen Bruchstrich:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

10.2.4.1 Die Lösungsfälle

① Nun ist bereits der entscheidende Moment gekommen. Hätten wir mit konkreten Zahlen gerechnet, so wäre jetzt klar, ob wir diese Gleichung weiter bearbeiten könnten oder nicht. **Eine negative Zahl auf der rechten Seite hätte uns (hoffentlich) vom Wurzelziehen abgehalten.** Wir hätten festgestellt: „Es gibt keine Lösung“.

Die Zahl auf der rechten Seite entscheidet demnach über die Anzahl Lösungen. Genauer gesagt ist der Zähler $b^2 - 4ac$ dafür entscheidend, denn der Nenner $4a^2$ ist (da a^2 Quadratzahl ist) stets positiv. Dieser Zähler heisst **Diskriminante** der quadratischen Gleichung und wird mit D bezeichnet:

$$D = b^2 - 4ac$$

Das Wort „Diskriminante“ kommt übrigens aus dem Lateinischen „discriminare“ und heisst „trennen, scheiden“. Die Diskriminante unterscheidet die Lösungsfälle.

Wir betrachten ein *Beispiel* dazu:

$$2x^2 + 4x + 7 = 0$$

Für dieses Beispiel gilt $a = 2$, $b = 4$ und $c = 7$. Setzen wir in $D = b^2 - 4ac$ ein, erhalten wir:

$$D = 16 - 56 = -40$$

Die Diskriminante D ist negativ! Das heisst bei einer quadratischen Ergänzung (wie oben durchgeführt) wäre die rechte Seite negativ! Wir könnten die Wurzel daraus nicht ziehen! Somit besitzt diese quadratische Gleichung keine Lösung! Die Lösungsmenge ist also leer. $\mathbb{L} = \{ \}$.

10.2.4.2 Die Lösungsformel

Kehren wir zu unserer vorher angefangenen Rechnung zurück. Wir schauen, wie weit wir beim Auflösen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gekommen sind.

Wir hatten die Gleichung

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

erhalten. Nehmen wir an, die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ sei positiv oder Null. Dann können wir weiterrechnen, weil wir aus $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ die Wurzel ziehen können. " $\pm \sqrt{\quad}$ "

Wir erhalten die beiden linearen Gleichungen

$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{bzw.} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Wir wenden die Wurzelregel für Brüche an, und bringen $\frac{b}{2a}$ auf die rechte Seite

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Das schreiben wir noch über einen gemeinsamen Bruchstrich und wir erhalten die Lösungen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

10.2.4.3 Die Lösungsformel und Lösungsfälle der quadratischen Gleichung

Lösungsformel und Lösungsfälle

Zur Untersuchung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

wird die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ eingeführt.

Ist $D > 0$ dann hat die Gleichung **zwei Lösungen**, nämlich:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Dafür schreibt man oft abgekürzt die Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} .$$

und meint damit: Die eine Lösung erhält man durch Addieren der Wurzel, die andere durch Subtrahieren der Wurzel .

Ist $D = 0$ dann hat die Gleichung nur **eine Lösung**: $x = \frac{-b}{2a}$

Ist $D < 0$ dann hat die Gleichung **keine Lösung**.

10.2.4.4 Die Anwendung der Lösungsformel

Die Benützung der Lösungsformel demonstrieren wir am *Beispiel* der Gleichung $5x^2 = 10 - 4x$.

Zuerst bringen wir sie in die allgemeine Form:

$$5x^2 + 4x - 10 = 0$$

Diese Gleichung vergleichen wir mit der allgemeinen Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

In unserem Beispiel steht **a** für **5**, **b** für **4** und **c** für **-10**. Zuerst berechnen wir die Diskriminante **D** und schauen somit nach, ob diese Gleichung überhaupt Lösungen hat:

$$D = b^2 - 4ac :$$

$$D = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (-10) = 16 + 200 = \mathbf{216}$$

$D > 0$; somit hat die Gleichung 2 Lösungen

Jetzt schreiben wir die Lösungsformel hin, ersetzen jedoch a, b und c durch die entsprechenden Zahlen. Für den Ausdruck unter der Wurzel D schreiben wir 216:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{216}}{10}$$

Damit steht die Lösung da. Wir brauchen diesen Ausdruck nur noch auszurechnen. Mit dem Taschenrechner finden wir das folgende, auf drei Stellen gerundete Resultat:

$$x_1 \approx 1.070 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -1.870$$

Somit ist $\mathbb{L} = \{1.070 ; -1.870\}$

Beispiel 2: ✍ Wir wollen die quadratische Gleichung $x^2 + 9x + 20 = 0$, die wir weiter oben durch Faktorisieren gelöst haben, nun auch mit der Lösungsformel lösen.

Beispiel 3: ✍ Man löse: $4x^2 - 2x - 12 = 0$

10.2.5 Faktorisieren von quadratischen Termen

Bis jetzt konnten wir mit der Probiermethode „geeignete“ quadratische Terme zerlegen:

$$x^2 + 9x + 20 \quad \rightarrow \dots \text{Probieren} \dots \rightarrow (x + 4)(x + 5)$$

Schöner Nebeneffekt: Man sieht die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \underline{x_1 = -4}; \underline{x_2 = -5}$$

Neu: Es geht auch umgekehrt:

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \quad \rightarrow \dots \text{Lösungsformel} \dots \rightarrow \underline{x_1 = -4}; \underline{x_2 = -5}$$

Schöner Nebeneffekt: Man kann die Faktorisierung des quadratischen Terms angeben:

$$x^2 + 9x + 20 \rightarrow (x + 4)(x + 5)$$

① Wir geben nun (*ohne Beweis*) ein **Rezept** an, **wie man jeden beliebigen quadratischen Term faktorisieren kann**.

Für das **Faktorisieren** eines quadratischen Terms $ax^2 + bx + c$ kann man wie folgt **vorgehen**:

1) Lösungen berechnen \rightarrow (2 Lösungen: $x_1; x_2$ / 1 Lösung: x_1 / oder **keine** Lösung)

2) Falls 2 Lösungen $\rightarrow ax^2 + bx + c = \boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$

Falls 1 Lösung $\rightarrow ax^2 + bx + c = \boxed{a(x - x_1)^2}$

Falls keine Lösung $\rightarrow ax^2 + bx + c$ ist unzerlegbar

Beispiel:

Wir möchten den Term $4x^2 - 2x - 12$ faktorisieren. Mit der Probiermethode kommt man vermutlich nicht weiter... ..mit dem Rezept hingegen:

1) Lösungen berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ weiter oben haben wir dies schon mal berechnet: } x_1 = -1.5; x_2 = 2$$

2) 2 Lösungen, a = 4: $\rightarrow 4(x - x_1)(x - x_2) = \boxed{4(x + 1.5)(x - 2)}$.

11 GLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES

Selbstverständlich gibt es auch Gleichungen die einen höheren Grad als zwei haben:

Beispiele:

$x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ ist eine Gleichung **3. Grades** (hat bis zu 3 Lösungen).

$3x^7 + 6x^5 - 4x + 100 = 0$ ist eine Gleichung **7. Grades** (hat bis zu 7 Lösungen).

Bemerkung:

„Speziell **einfache**“ Gleichungen höheren Grades kann man zwar oft **direkt lösen** (zum Beispiel sieht man bei der Gleichung $x^4 = 1$ sofort die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1; -1\}$), **im allgemeinen** geht dies jedoch **nicht!**

Es gilt:

Für Gleichungen **3. oder 4. Grades** gibt es zwar **Lösungsformeln**, doch sind diese **sehr kompliziert** und umständlich.

Für Gleichungen **5. oder höheren Grades** ist sogar bewiesen, dass es **keine allgemeinen Lösungsformeln** gibt.

In der Praxis benutzt man **daher** zur Lösung von Gleichungen höheren als 2. Grades meistens **numerische Näherungsverfahren** (Computer oder moderne Taschenrechner).

Wir werden nur kurz eine „speziell einfache“ Form von Gleichungen vierten Grades vorstellen:

11.1 Biquadratische Gleichungen

Gleichungen vierten Grades sind, wie oben erwähnt, im allgemeinen schwer zu lösen! Wir betrachten hier aber eine ganz spezielle Gleichung vierten Grades, eine sog. **biquadratische Gleichung**:

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0 \quad (\text{Der Ausdruck biquadratisch hat natürlich mit der Ähnlichkeit einer quadratischen Gleichung zu tun: } ax^4 + bx^2 + c = 0.)$$

Wir **substituieren** (=ersetzen) nun x^2 mit z . Es sei also:

$$x^2 = z$$

Somit erhalten wir eine *quadratische* Gleichung für z :

$$z^2 - 29z + 100 = 0$$

Und diese können wir wie gewohnt nach z auflösen. Wir erhalten für die Diskriminante: $D = 441$; und für die Lösungen: $z_1 = 25$; $z_2 = 4$. (*Man rechne nach!*)


Anders formuliert: $x^2 = 25$ und $x^2 = 4$ **erfüllen** die ursprüngliche Gleichung $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

Wir interessieren uns aber für welche x (und nicht für welche x^2) die Gleichung erfüllt wird. Dies liegt nun auf der Hand:

1.Fall: Aus $x^2 = 25$ folgt: $\underline{x_1 = 5}$ und $\underline{x_2 = -5}$.

2.Fall: Aus $x^2 = 4$ folgt: $\underline{x_1 = 2}$ und $\underline{x_2 = -2}$.

Somit ergibt sich für die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{5; -5; 2; -2\}$.

Beispiel 2:  $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

12 LOGARITHMEN UND EXPONENTIALGLEICHUNGEN

12.1 Logarithmen

12.1.1 Ziel und Problemstellung


Ziel: Wir möchten Gleichungen der folgenden Art nach x auflösen: $2^x = 10$.

Problem: x kommt im Exponenten vor, und wir können deshalb x nicht wie gewohnt isolieren. Damit x aus dem Exponenten „beseitigt“ werden kann, brauchen wir eine neue Rechenoperation. Das sogenannte „Logarithmieren“.

Einfache Exponentialgleichungen können wir jedoch direkt lösen.

Bsp.: $2^x = 8$, hat die Lösung $x = 3$.

Für das gesuchte x schreibt man nun auch $x = \log_2 8$. Es wird gelesen als „*der Logarithmus von 8 zur Basis 2*“. In diesem Fall wissen wir also, dass $\log_2 8 = 3$ ist.


Weitere Beispiele:  Weil $3^4 = 81$ ist, gilt $\log_3 81 =$

Weil $10^2 = 100$ ist, gilt $\log_{10} 100 =$

Weil $5^3 = 125$ ist, gilt $\log_5 125 =$

Weil $7^0 = 1$ ist, gilt $\log_7 1 =$

Weil $10^{-1} = 0.1$ ist, gilt $\log_{10} 0.1 =$

Andersrum:  $\log_3 9 =$ da $3^2 = 9$

$\log_7 7 =$ da ...

$\log_{10} 1000 =$ da ...

$\log_2 -16 =$ da ...

$\log_1 8 =$ da ...

An dieser Stelle geben wir die formale Definition des Logarithmus an:

Der **Logarithmus von b zur Basis a** ist derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ („*x* gleich Logarithmus von b zur Basis a “).

① Diese Definition macht nur für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ Sinn! (Wie in den Beispielen gesehen.)

Problem: Was ist nun aber mit $2^x = 10$?

Für die Lösung kann man $x = \log_2 10$ schreiben. **Das Problem ist nur noch, den konkreten Zahlenwert für x anzugeben.** (Der Zahlenwert wird zwischen 3 und 4 liegen...)

Da wird uns der Taschenrechner weiterhelfen, wie wir noch sehen werden. (Dieses Problem ist übrigens nicht neu! Was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = 10$? Man sieht die Lösungen sofort: $x = \pm\sqrt{10}$. Ja, aber wie gross ist nun der Wert $\sqrt{10}$? Dazu brauchen wir den Taschenrechner! Bei den Logarithmen ist es genau so! Einfache Logarithmen kann man sofort angeben, für die komplizierteren brauchen wir einen Taschenrechner.)

12.1.2 Rechenregeln für Logarithmen

Es gelten die folgenden **Rechenregeln für Logarithmen** (Diese Regeln folgen aus den Potenzregeln und sehen deshalb auch verwandt dazu aus. Dies überrascht uns nicht, da Logarithmen eigentlich Exponenten sind.)

1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$

(Einen Beweis dieser Regeln findet man im Anhang 19.5 auf S.168.)

...Leider befindet sich nun auf dem Taschenrechner keine Taste $\log_a b$. Da kommt nur die Taste \log vor, und steht für den sogenannten „**Zehnerlogarithmus**“.

① Die Basis „10“ schreibt man beim Zehnerlogarithmus nicht hin. Statt „**log**₁₀“ schreiben wir einfach „**log**“.

Beispiele: $\log 10 = 1$; $\log 1000 = 3$; $\log 25 \approx 1.398$; $\log 2672 \approx 3.427$

Wichtig ist nun genau zu verstehen, was die vom Rechner angegebenen Werte für eine Bedeutung haben: $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$; $\log 2672 \approx 3.427 \Leftrightarrow 10^{3.427} = 2672$

Die \log -Taste ist keine „Zaubertaste“, die zu einer Zahl b eine beliebige Zahl ausspuckt. Sie gibt zur Zahl b den eindeutigen **Lösungswert x** der Gleichung $10^x = b$.

Wieso kommt aber nur die \log -Taste vor? (Damit können wir doch nicht $2^x = 10$ auflösen? Was ist mit $x = \log_2 10$?) Das hat seinen Grund: Aus dem Zehnerlogarithmus, also mit der \log -Taste, lässt sich ein Logarithmus zu einer beliebigen Basis a berechnen. Wie das genau geht, werden wir gleich sehen.

12.1.3 Berechnung von beliebigen Logarithmen

Wenn wir also die Gleichung $2^x = 10$ lösen wollen, dann lautet die Lösung zunächst mal $x = \log_2 10$. Wir werden sehen, dass das nichts anderes als $\frac{\log 10}{\log 2}$ ist und somit mit dem Taschenrechner berechnet werden kann. Das Resultat lautet dann: $x = 3.3219$.

① Begründung:

$2^x = 10$		<i>links und rechts den (Zehner!)-Logarithmus nehmen.</i>
$\log(2^x) = \log 10$		<i>links wenden wir die Logarithmenrechenregel 3) an: $\log(b^c) = c \cdot \log b$</i>
$x \cdot \log 2 = \log 10$		<i>x kommt somit nicht mehr im Exponenten vor! Wir dividieren $:\log 2$</i>
$x = \frac{\log 10}{\log 2}$		<i>Mit dem Taschenrechner:</i>
<u>$x = 3.3219$</u>		

Wir fassen zusammen:

Für die Lösung von $2^x = 10$ können wir den Ausdruck $x = \log_2 10$ schreiben. Es gibt jedoch keine entsprechende Taste auf dem Rechner, die uns direkt den Zahlenwert liefert. Dies ist aber kein Problem, da sich der Zahlenwert aus dem Zehnerlogarithmus, also mit der log-Taste berechnen lässt: $x = \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3219$.

① Ab sofort brauchen wir also nur noch den „Zehnerlogarithmus“ „log“:

Bsp.: $5^x = 7$, die Lösung lautet $\underline{x} = \log_5 7 = \frac{\log 7}{\log 5} = \underline{\underline{1.2091}}$

Zudem können wir bereits jede einfache Exponentialgleichung der Form $a^x = b$ lösen:

Beispiel: ✍ $2^x = 1000$

12.1.4 Der Natürliche Logarithmus ln

Der Schweizer Mathematiker ¹Leonhard Euler hat im 18. Jahrhundert eine Zahl in die Mathematik eingeführt, die mit „ e “ bezeichnet wird und seither nicht mehr wegzudenken ist. Wie π ist sie eine irrationale Zahl, und ihre Dezimaldarstellung beginnt folgendermassen:

Eulersche Zahl: $e = 2.71828182845904523536028747135266\dots$

Was es mit der Zahl e auf sich hat, können wir in diesem Kurs nur zu einem kleinen Teil vermitteln (siehe später Kapitel 16.10.2 Die natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$ auf S.146.), denn ihre Bedeutung wird erst nach und nach in der höheren Mathematik klarer. Es sei jedoch noch das Folgende vermerkt:

Die Zahl e kann für sehr grosse Zahlen n durch den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ beliebig angenähert werden (man sagt auch, e sei der Grenzwert der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$):

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
1'000	2.71692
1'000'000	2.71828

Zusammenhang zu den Logarithmen:

① Logarithmen zur Basis $e=2,718\dots$ bezeichnet man als **natürliche Logarithmen**. Statt \log_a schreibt man **ln a**.

Da der natürliche Logarithmus „ln“ in der Mathematik und Technik eine grosse Rolle spielt, ist heutzutage auf den meisten Taschenrechnern eine ln-Taste vorhanden.

Ein Beispiel dazu: ln100 = 4.6052 $\Leftrightarrow e^{4.6052} = 100$.

Bemerkung:

Da die Rechenregeln für Logarithmen für beliebige Basen gelten, kann man eine Exponentialgleichung anstatt mit dem Zehnerlogarithmus „log“ auch mit Hilfe des natürlichen Logarithmus lösen.

Bsp.: $5^x = 7$. Auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus „ln“ nehmen, die Rechenregel 3) für Logarithmen anwenden und nach x auflösen: Die Lösung lautet $\underline{x} = \frac{\ln 7}{\ln 5} = \underline{\underline{1.2091}}$.

¹ Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in St. Petersburg)

12.2 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Lösungsvariable x im Exponenten vorkommt. Nicht alle Exponentialgleichungen sind gleich schwer zu lösen. **Wir unterscheiden zwei Fälle.**

12.2.1 Fall 1: Es gibt eine gemeinsame Basis

In diesem Fall kommen wir ohne Logarithmen zum Ziel. Voraussetzung ist jedoch das Beherrschen der Potenzregeln (Vgl. 7.3.3.6 auf S.61.)

① Musterbeispiel:

$2^{x+1} = 8$ | links und rechts stehen Potenzen von 2. (links: 2^{x+1}); (rechts: 2^3). Es gibt somit eine gemeinsame Basis.


$2^{x+1} = 2^3$ | Beide Seiten sind gleich, wenn die Exponenten gleich sind. Wir brauchen also nur noch die Exponenten zu vergleichen. (Sog. **Exponentenvergleich**.)

$x + 1 = 3$ | nach x auflösen

$x = 2$

Wenn wir also erkennen, dass auf beiden Seiten eine Potenz derselben Basis vorkommt, schreiben wir die entsprechenden Potenzen hin; und vergleichen dann die Exponenten.

Beispiele:  $4^x = 8$

 $3^x = \frac{1}{27}$

12.2.2 Fall 2: Es gibt keine gemeinsame Basis

In diesem Fall kommen wir ohne logarithmieren nicht weiter, wie wir weiter oben schon gesehen haben. Voraussetzung ist das Beherrschen der Rechenregeln für Logarithmen (Vgl. 12.1.2 auf S.80.)

① *Musterbeispiel:*

$$2^{x+1} = 5 \quad | \quad \text{links und rechts logarithmieren.}$$

$$\log(2^{x+1}) = \log 5 \quad | \quad \text{links wenden wir die Logarithmenrechenregel } \log(b^c) = c \cdot \log b \text{ an.}$$

$$(x+1) \cdot \log 2 = \log 5 \quad | \quad x \text{ kommt aus dem Exponenten runter. Wir dividieren } | : \log 2$$

$$x+1 = \frac{\log 5}{\log 2} \quad | \quad -1$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} - 1 \quad | \quad \text{Mit dem Taschenrechner ergibt sich}$$

$$\underline{\underline{x = 1.3219}}$$

Der allgemeine Lösungsweg in diesem Fall lässt sich wie folgt beschreiben:

- 1) Gleichung logarithmieren. Die Lösungsvariable kommt dadurch aus dem Exponenten runter. (*Rechenregeln für Logarithmen exakt anwenden!*)
- 2) Neue Gleichung nach x auflösen und ausrechnen.

Beispiel:  $4^{x+2} = 3^{x-5}$