

16.4 Quadratische Funktionen

16.4.1 Allgemeine Definition und Begriffe

Definition:

Eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) heisst eine **quadratische Funktion**.

Die Koeffizienten a , b und c sind Parameter, die für beliebige reelle Zahlen stehen. Die Zusatzbedingung $a \neq 0$ ist notwendig, da sonst eine lineare Funktion $f(x) = bx + c$ definiert wäre. Dagegen dürfen sowohl b als auch c den Wert 0 haben.

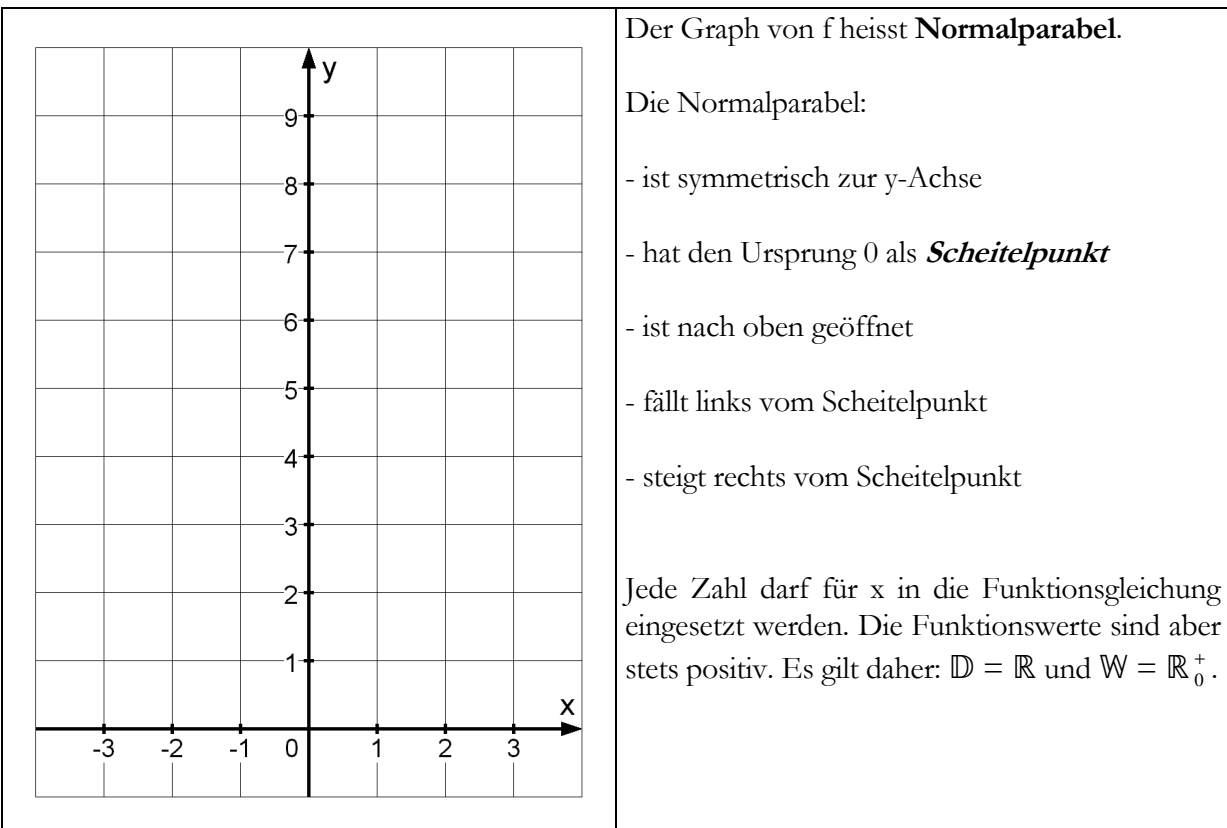
Ein *Beispiel* für eine quadratische Funktion wäre also: $f(x) = x^2 - 10x + 24$.

In den folgenden Abschnitten sollen die verschiedenen Formen quadratischer Funktionen untersucht werden.

16.4.2 Die Normalparabel

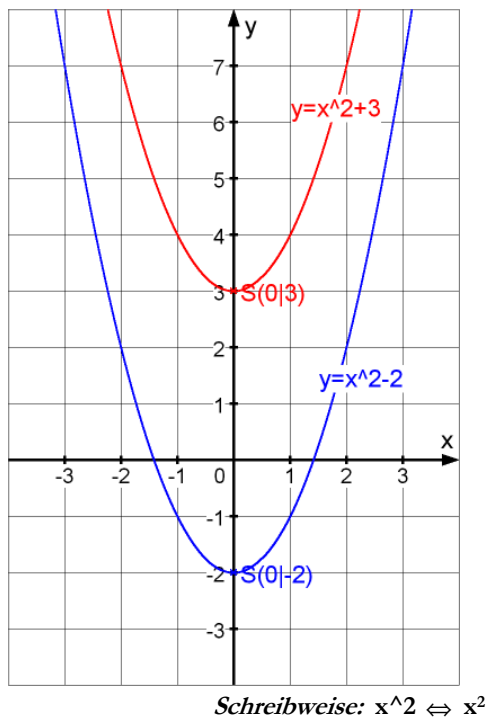
Der einfachste Fall einer quadratischen Funktion ist **$f: y = x^2$** .

Wir zeichnen den Graphen dazu. 



16.4.3 Parabeln mit der Gleichung $y = x^2 + v$

Beispiele: $y = x^2 + 3$ oder $y = x^2 - 2$.



Parabeln mit der Gleichung $y = x^2 + v$ besitzen den Scheitelpunkt $S(0/v)$.

Sie sind gegenüber der Normalparabel in y -Richtung verschoben; für einen **positiven** Wert von v nach **oben**, für einen **negativen** von v nach **unten**.

Konkret bedeutet das für unsere Beispiele:

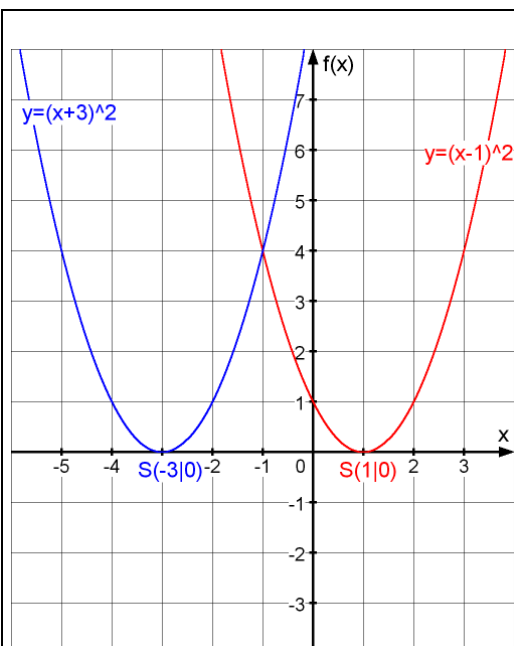
$y = x^2 + 3$ hat den Scheitelpunkt $S(0/3)$

$y = x^2 - 2$ hat den Scheitelpunkt $S(0/-2)$

(Dies sollte uns bekannt vorkommen. Bei den linearen Funktionen $y = m \cdot x + n$ bewirkt das konstante Glied n ebenfalls eine Verschiebung der Gerade $y = m \cdot x$ in y -Richtung.)

16.4.4 Parabeln mit der Gleichung $y = (x - u)^2$ und $y = (x + u)^2$

Wir betrachten wieder zwei Beispiele dazu: $y = (x - 1)^2$ und $y = (x + 3)^2$.



Parabeln mit der Gleichung $y = (x - u)^2$ besitzen den Scheitelpunkt $S(u/0)$. Sie sind gegenüber der Normalparabel um u nach **rechts** verschoben.

Parabeln mit der Gleichung $y = (x + u)^2$ besitzen den Scheitelpunkt $S(-u/0)$. Sie sind gegenüber der Normalparabel um u nach **links** verschoben.

Konkret bedeutet das für unsere Beispiele:

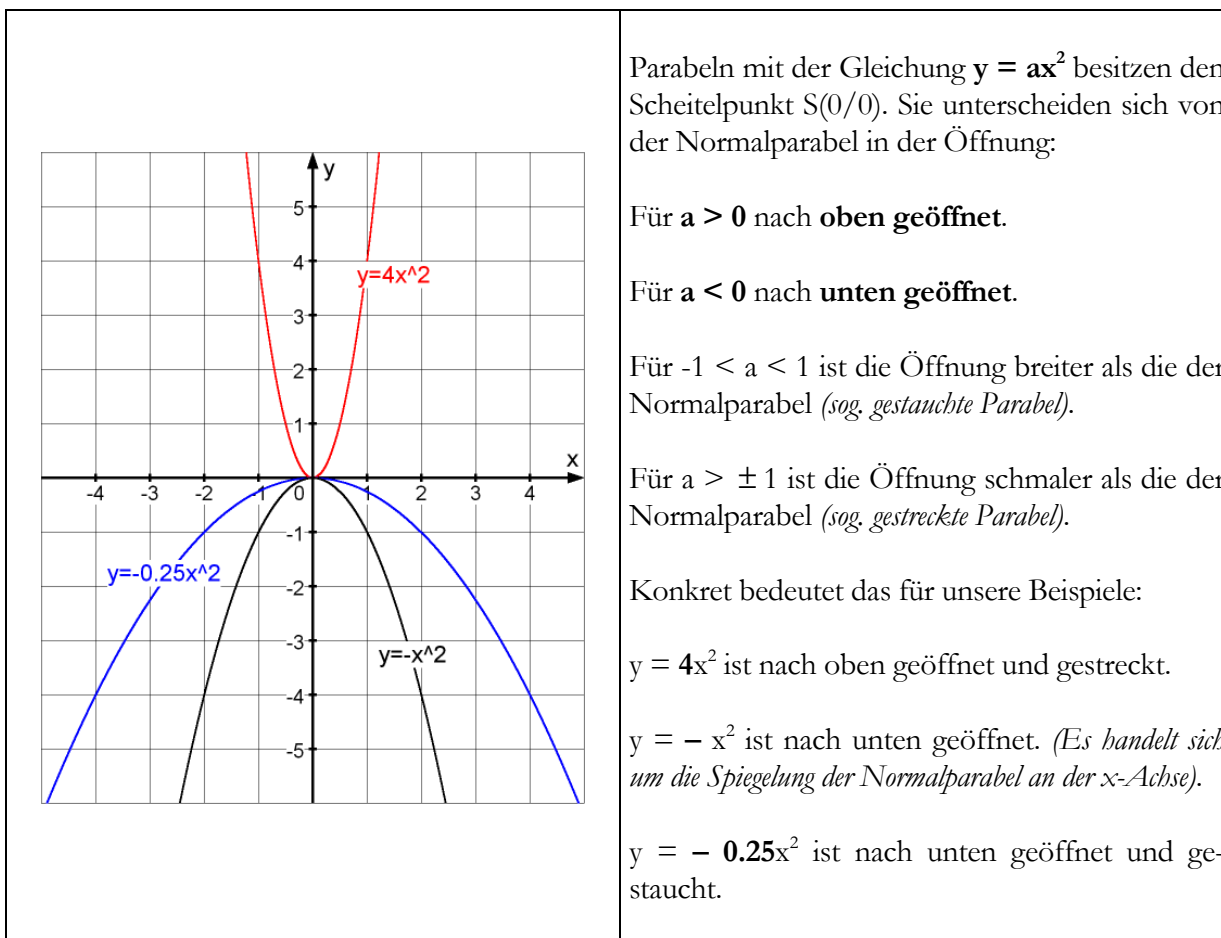
$y = (x - 1)^2$ hat den Scheitelpunkt $S(1/0)$

$y = (x + 3)^2$ hat den Scheitelpunkt $S(-3/0)$

Das kann man auch so einsehen: $y = (x - 1)^2$ wird nie negativ (da Quadratzahlen!). Der tiefste Punkt der Parabel (=Scheitel!) liegt somit bei $x=1$, denn dort ergibt sich der kleinste y -Wert (nämlich Null!).

16.4.5 Parabeln mit der Gleichung $y = ax^2$

Wir betrachten 3 Beispiele dazu: $y = 4x^2$; $y = -x^2$ und $y = -0.25x^2$.



16.4.6 Die Scheitelform der Parabel

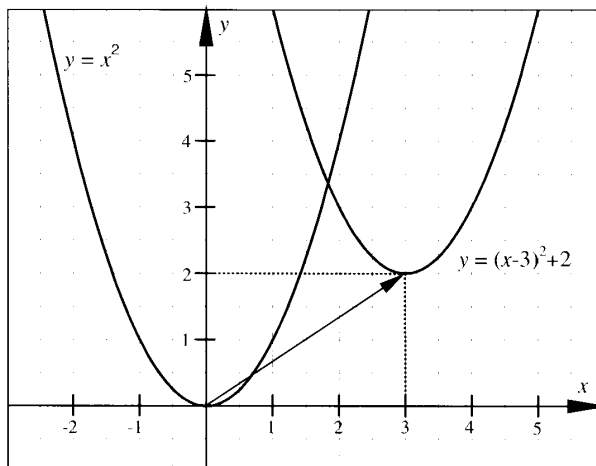
Definition:

Die Scheitelform einer Parabel lautet $y = a(x - u)^2 + v$.

① Parabeln mit dieser Gleichung besitzen (*nach den bisherigen Überlegungen*) den Scheitelpunkt $S(u/v)$. Sie sind gegenüber der Normalparabel um u in x -Richtung und um v in y -Richtung verschoben. Der Parameter a wirkt sich auf die Öffnung aus.

Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion: $y = (x - 3)^2 + 2$.

Aus der Tatsache $a=1$ erkennen wir, dass die Parabel dieselbe Öffnung wie die Normalparabel hat. Aus $u=3$ und $v=2$ erkennen wir, dass die Normalparabel um 3 Einheiten in x -Richtung und um 2 Einheiten in y -Richtung verschoben wird. Der Scheitel liegt somit bei $S(3/2)$:



Frage: Das ist ja schön und gut, aber wie gehe ich vor, wenn ich eine beliebige quadratische Funktion in allgemeiner Form habe? Z. B. wenn ich die Funktion $y = x^2 - 10x + 24$ habe, welche keine Scheitelform hat?

① **Antwort:** Durch quadratische Ergänzung kann eine allgemeine Parabelgleichung stets auf die Scheitelform gebracht werden.

Zum Beispiel $y = x^2 - 10x + 24$:

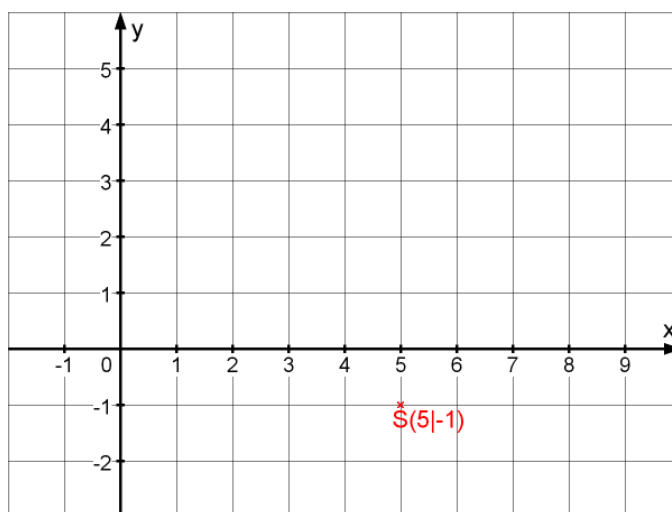
$$y = x^2 - 10x + 24 \text{ (Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat mit dem Trick } +25 \text{ und } -25)$$

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 24$$

$$\underline{y = (x - 5)^2 - 1 .}$$

Wir haben also durch die quadratische Ergänzung die Scheitelform hergestellt. Wir können nun den Scheitel und die Öffnung der Parabel sofort ablesen: **Öffnung: $a=1$. Scheitel: $S(5|-1)$.** Dies ermöglicht uns nun den Graph der Funktion $y = x^2 - 10x + 24$ zu skizzieren.

Will man noch genau bestimmen wo der Graph die x-Achse schneidet, sind zusätzlich die Nullstellen zu bestimmen. Es ist also die Gleichung $x^2 - 10x + 24 = 0$ zu lösen. (Tipp: *Faktorisieren geht hier schneller als die Anwendung der Lösungsformel.*)



Wir führen nun die Überlegungen der Scheitelpunktbestimmung durch quadratisches Ergänzen ganz allgemein durch, also für eine beliebige quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$. Als Resultat werden wir eine Formel für den Scheitelpunkt erhalten.

16.4.7 Die Herleitung der Scheitelpunktformel

Idee: Man kann eine beliebige quadratische Gleichung „ $y = ax^2 + bx + c$ “ durch geeignetes Umformen in die Scheitelform „ $y = a(x - \square)^2 + \square$ “ bringen und wir erhalten den Scheitelpunkt $S(\square / \square)$.

Beispiel: $y = x^2 - 10x + 24$ (...umformen...) $y = (x - 5)^2 - 1$. Also $S(5 / -1)$.

Wir wollen dieses „Umformen“ ein für alle Mal durchführen:

Die Herleitung der Scheitelpunktformel:

$y = ax^2 + bx + c$	<p><i>Trick: Wir addieren $\frac{b^2}{4a}$ und subtrahieren es gleich wieder.</i></p>
$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a}$	<p><i>Dies ist erlaubt, da sich damit der Wert nicht ändert „+ 0“.</i></p>
$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$	<p><i>Wir klammern a bei den ersten drei Gliedern aus, um in der Klammer ein binomisches Quadrat herzustellen.</i></p>
$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	<p><i>Wir wenden die binomische Formel an. Den Ausdruck $c - \frac{b^2}{4a}$ schreiben wir über einen gemeinsamen Bruchstrich.</i></p>
$y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$	<p><i>Wir passen in der Klammer $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ die Vorzeichen an, um die Scheitelform herzustellen. Hingegen betreiben wir durch Ausklammern von (-1) im Ausdruck $\frac{4ac - b^2}{4a}$ Resultatästhetik.</i></p>
$y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a}$	<p><i>Denn $-(b^2 - 4ac) = -D$. ($D = \text{Diskriminante}$.)</i></p>

① Zusammenfassung:

Der Graph der quadratischen Funktion

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

ist die nach oben ($a > 0$) bzw. nach unten ($a < 0$) geöffnete, zu $y = ax^2$ deckungsgleiche Parabel mit dem Scheitel (u/v) und der Gleichung

$$y = a(x - u)^2 + v,$$


wobei die **Scheitelkoordinaten** (u/v) aus den Koeffizienten a , b und c zu berechnen sind:

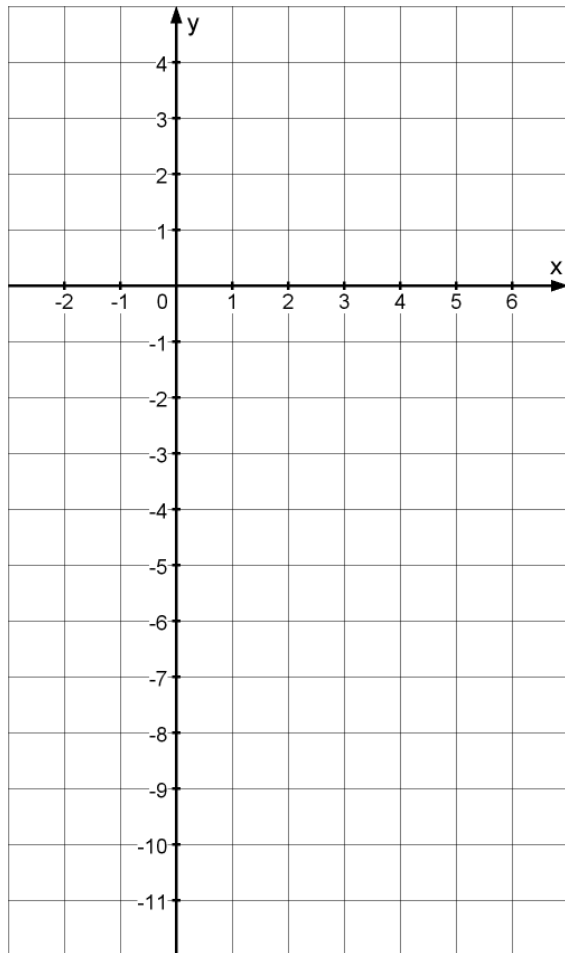
$$u = -\frac{b}{2a}, \quad v = -\frac{D}{4a}$$

Dabei ist $D = b^2 - 4ac$ die Diskriminante der quadratischen Funktion.

16.4.7.1 Anwendung der Scheitelformel

Als Musterbeispiel behandeln wir die Funktion $f: y = 2x^2 - 8x - 3$.

 Man bestimme die Scheitelkoordinaten und die Öffnung der Parabel. Anschliessend skizziere man die Parabel ins Koordinatensystem. Wo schneidet die Parabel die y-Achse? Schneidet die Parabel auch die x-Achse? Falls ja, wo genau?



16.5 Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen

Die Überlegungen zur Verschiebung, Streckung oder Spiegelung einer Parabel kann man für beliebige (also nicht zwangsläufig quadratische) Funktionen $f(x)$ verallgemeinern.

16.5.1 Verschiebung in Richtung der y-Achse

Mit v sei eine beliebige **positive reelle Zahl** gemeint.

Der Graph der Funktion $f(x) + v$ entsteht, indem der Graph der Funktion $f(x)$ um v Einheiten nach **oben** verschoben wird.

Der Graph der Funktion $f(x) - v$ entsteht, indem der Graph der Funktion $f(x)$ um v Einheiten nach **unten** verschoben wird.

Beispiele: Wir betrachten im Vergleich zur Normalparabel die Graphen der Funktionen

$f(x) = x^2 + 2$ (Verschiebung der Normalparabel um 2 Einheiten nach oben.)

$f(x) = x^2 - 3$ (Verschiebung der Normalparabel um 3 Einheiten nach unten.)

16.5.2 Verschiebung in Richtung der x-Achse

Mit u sei eine beliebige **positive reelle Zahlen** gemeint.

Der Graph der Funktion $f(x + u)$ entsteht, indem der Graph der Funktion $f(x)$ um u Einheiten nach **links** verschoben wird.

Der Graph der Funktion $f(x - u)$ entsteht, indem der Graph der Funktion $f(x)$ um u Einheiten nach **rechts** verschoben wird.

Beispiele: Wir betrachten im Vergleich zur Normalparabel die Graphen der Funktionen

$f(x) = (x + 3)^2$ (Verschiebung der Normalparabel um 3 Einheiten nach links.)

$f(x) = (x - 1)^2$ (Verschiebung der Normalparabel um 1 Einheit nach rechts.)

16.5.3 Streckung und Spiegelung eines Graphen

Multipliziert man die Funktion $f(x)$ mit einer Konstanten a , so wird der Graph in y-Richtung gestreckt bzw. gestaucht; bei Multiplikation mit -1 wird der Graph an der x-Achse gespiegelt.

Beispiele: Wir betrachten im Vergleich zur Normalparabel die Graphen der Funktionen

$y = -x^2$ (Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse.)

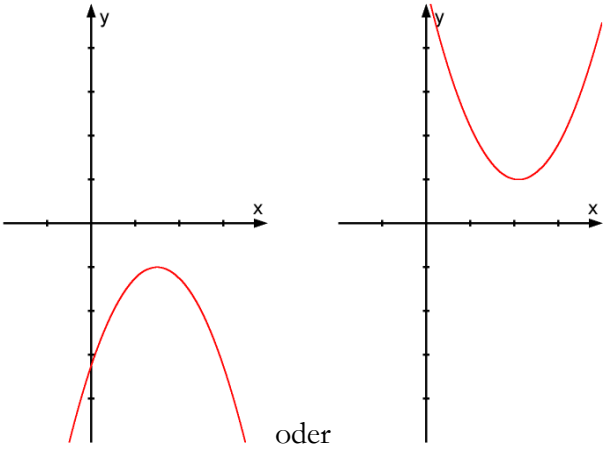
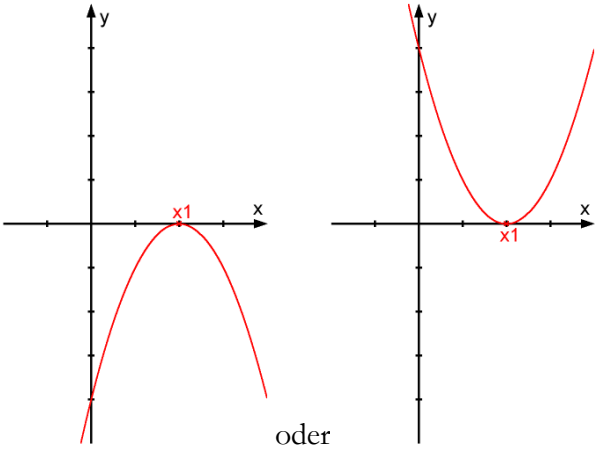
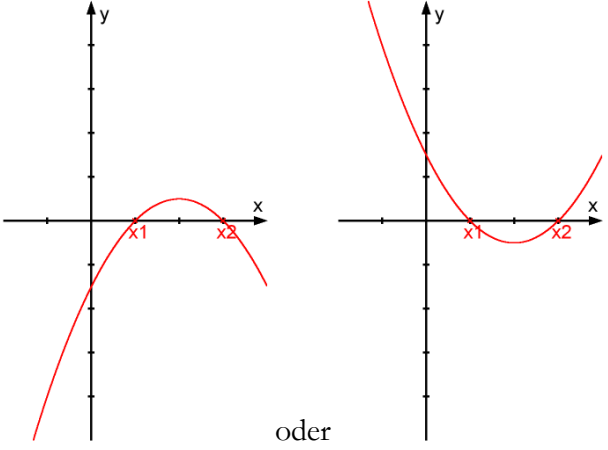
$y = 4x^2$ (Streckung der Normalparabel in um den Faktor 4.)

① Natürlich lassen sich Streckungen und Verschiebungen miteinander kombinieren !

Beispiel: Wir betrachten im Vergleich zur Normalparabel den Graph der Funktion

$f(x) = 2(x + 4)^2 - 7$ (Um den Faktor 2 gestreckte, um 4 Einheiten nach links und 7 Einheiten nach unten verschobene Normalparabel.)

16.6 Zusammenhang zwischen quadr. Funktionen & quadr. Gleichungen

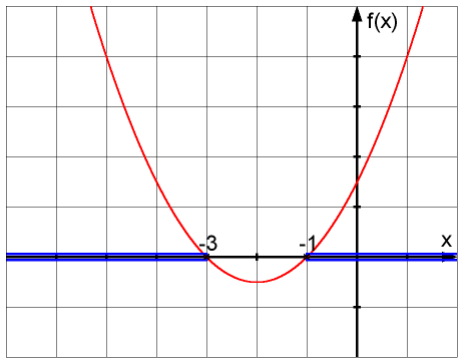
<p>Quadratische Funktionen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$</p>	<p>Quadratische Gleichungen $0 = ax^2 + bx + c$</p>
	<p>$\mathbb{D} < 0$, also $\mathbb{L} = \{ \}$</p> <p>Wenn also die Funktionsgleichung $0 = ax^2 + bx + c$ keine Lösung hat, dann hat die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ keine Nullstellen, da $f(x)$ nirgends den Wert Null hat, und somit nirgends die x-Achse schneidet. Umgekehrt gilt dasselbe!</p>
	<p>$\mathbb{D} = 0$, also $\mathbb{L} = \{ x_1 \}$, mit $x_1 = \frac{-b}{2a}$</p> <p>Wenn also die Funktionsgleichung $0 = ax^2 + bx + c$ genau eine Lösung x_1 hat, dann hat die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ genau eine Nullstelle x_1, da nur $f(x_1)$ den Wert Null hat. Dies ist gleichzeitig der Scheitelpunkt!</p> <p>Beispiele solcher quadratischer Funktionen wären $y = (x - 1)^2$ und $y = (x + 3)^2$.</p>
	<p>$\mathbb{D} > 0$, also $\mathbb{L} = \{ x_1, x_2 \}$</p> <p>mit $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$</p> <p>Wenn also die Funktionsgleichung $0 = ax^2 + bx + c$ zwei Lösungen x_1 und x_2 hat, dann hat die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ die zwei Nullstellen x_1 und x_2. An diesen Stellen ist der Funktionswert jeweils 0.</p>

16.7 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen hängen eng mit quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen zusammen. Daher wollen wir deren Lösung auch direkt dort anknüpfen, und anhand eines Beispiels erklären.

Musterbeispiel:

Man löse die quadratische Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} > 0$.

<p><i>Wir berechnen die Nullstellen der Funktion</i></p> <p>Es gilt die folgende Gleichung zu lösen:</p> $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0.$ <p>Wir berechnen zunächst die Diskriminante:</p> $D = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 4 - \frac{12}{4} = 1.$ <p>Weil $D > 0$ ist, haben wir zwei Lösungen:</p> $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{1} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$ <p>Bei -1 und bei -3 haben wir also eine Nullstelle.</p>	<p><i>Wir skizzieren den Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$</i></p> <p>Wegen $a = \frac{1}{2} > 0$, ist die Parabel nach oben geöffnet. Die Nullstellen kennen wir ebenfalls; also können wir den Graphen skizzieren:</p> 
---	--

① Die folgende Überlegung ist nun entscheidend:

Da die Parabel nach oben geöffnet ist und zwei Nullstellen besitzt, liegt der Parabelbogen zwischen den Nullstellen unterhalb der x-Achse, ausserhalb des Nullstellenintervalls verläuft die Parabel oberhalb der x-Achse.

Oder so:

Da die Parabel nach oben geöffnet ist und zwei Nullstellen besitzt, haben die Parabelpunkte zwischen den Nullstellen negative y-Koordinaten und die in den beiden Aussenbereichen positive y-Koordinaten.

Zusammenfassend bedeutet dies:

Für die Zahlen $x = -3$ und $x = -1$ gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$.

Für jede Zahl x aus dem Intervall $]-3;-1[$ gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} < 0$.

Für jede Zahl x aus dem restlichen Bereich $\mathbb{R} \setminus [-3;-1]$ gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} > 0$.

Die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} > 0$ ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-3;-1]$.

✍ Aus den obigen Überlegungen kann man nun direkt auch die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \leq 0$ angeben.

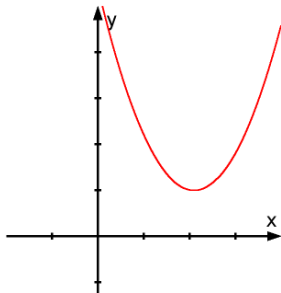
$$\mathbb{L} = \dots\dots\dots$$

① Es genügt jeweils eine ungefähre Skizze des Graphen um die Lösungsmenge zu bestimmen!

Beispiel 2): $x^2 + 4x + 5 < 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen.

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ Parabel ist nach oben geöffnet. Skizze:

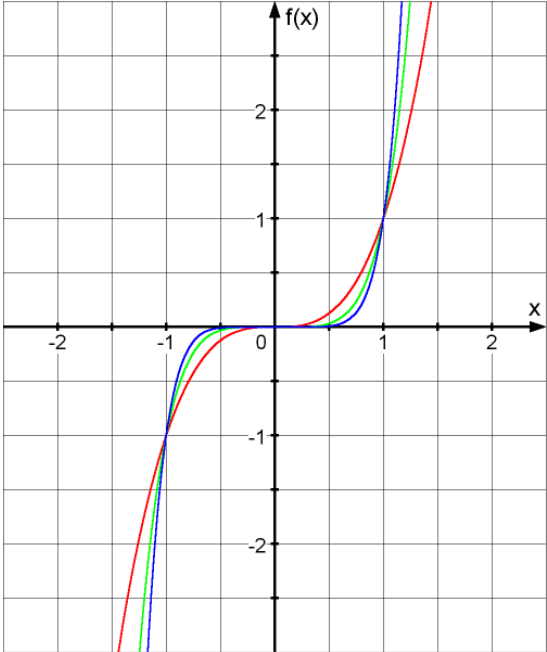
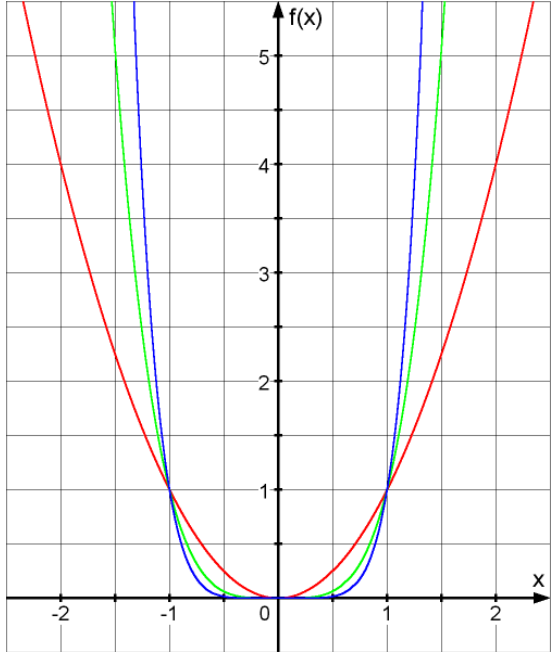


Die Kurve verläuft ganz oberhalb der x-Achse. Folgerung: $f(x) = x^2 + 4x + 5$ nimmt nirgends negative Werte an. Die Ungleichung $x^2 + 4x + 5 < 0$ hat somit keine Lösungen. Es gilt: $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel 3): ✍ $-2x^2 + 5x - 2 > 0$.


16.8 Potenzfunktionen

Wir betrachten Funktionen der Form $f(x) = x^n$ für ganzzahlige Exponenten n . Je nach Wahl des Exponenten ergibt sich ein anderer Graph, wie wir gleich sehen werden:

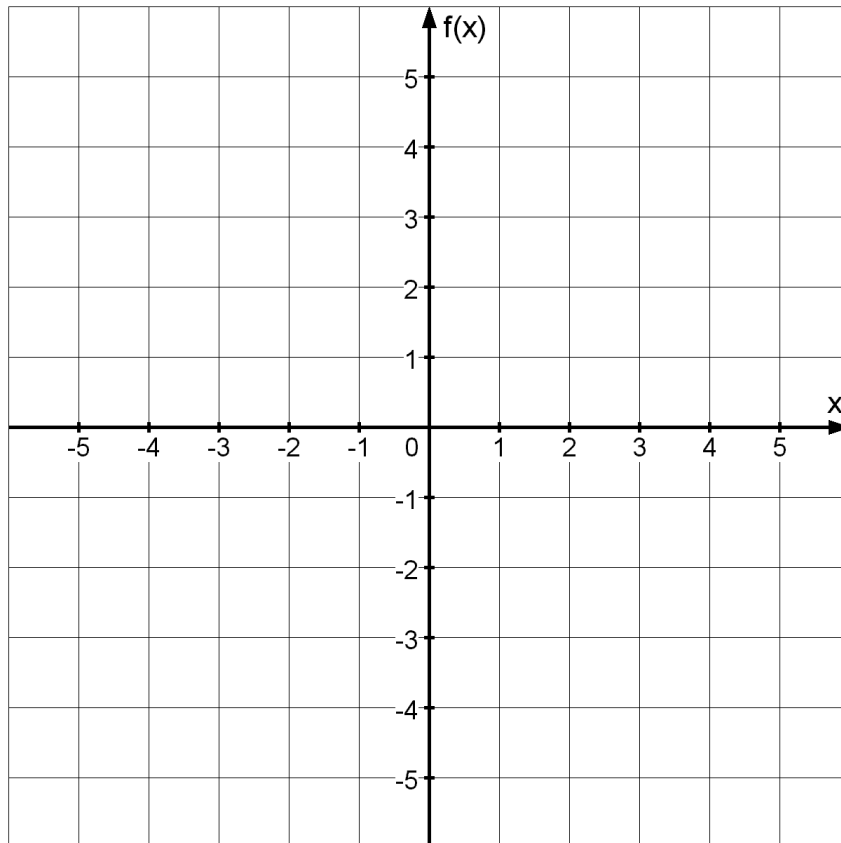
Positive ganzzahlige Exponenten:	
<p><u>Ungerade Hochzahlen:</u> Der Graph beschreibt eine S-Kurve und ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph geht durch die Punkte (1/1) und (-1/-1). Es gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.</p>	<p><u>Gerade Hochzahlen:</u> Der Graph ähnelt einer Parabel und ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph geht durch die Punkte (1/1) und (-1/1). Es gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$.</p>
	
<p>$f_3: y = x^3$ $f_5: y = x^5$ $f_7: y = x^7$</p>	<p>$f_2: y = x^2$ $f_4: y = x^4$ $f_6: y = x^6$</p>

Man beachte dass im Intervall $]0; 1[$ die Werte von x^5 kleiner als die von x^3 sind. (Dasselbe gilt für x^4 und x^2 .)

Wir betrachten ein Beispiel einer gestreckten und verschobenen Potenzfunktion.

Beispiel: $f(x) = 2(x - 3)^3$ (Man bestimme auch den Schnittpunkt des Graphen mit der y -Achse.) 

Wir benutzen die Resultate über die Bedeutung des Streckungsfaktors a und über die Verschiebung in x -Richtung, um die Skizze des Graphen zu entwerfen. (Vgl. Kapitel 16.5 Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen auf S.137):



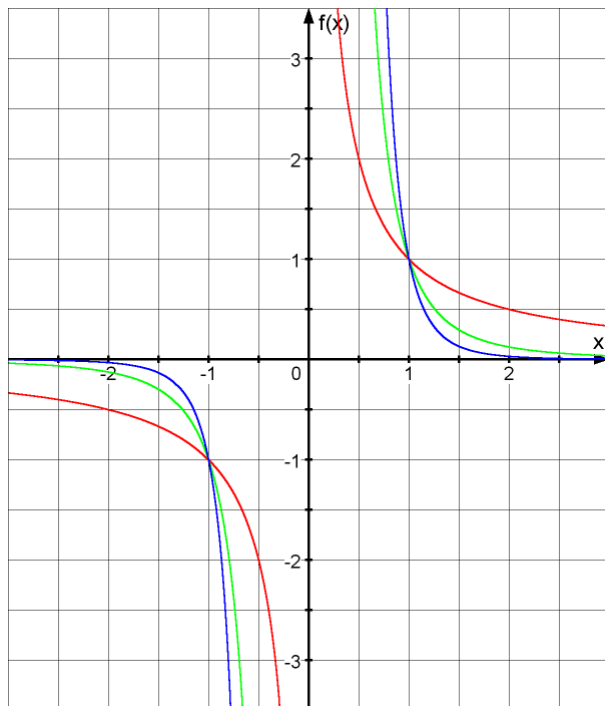
Negative ganzzahlige Exponenten:

Ungerade Hochzahlen:

Der Graph ähnelt einer sogenannten „Hyperbel“ und ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

(Für $x = 0$ nicht definiert!)

Es gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



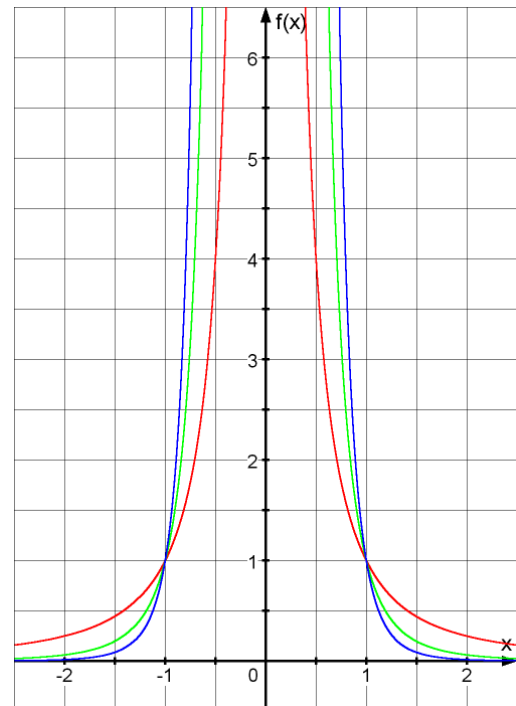
$$\begin{aligned} f_1: y &= x^{-1} = 1/x \\ f_3: y &= x^{-3} = 1/x^3 \\ f_5: y &= x^{-5} = 1/x^5 \end{aligned}$$

Gerade Hochzahlen:

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

(Für $x = 0$ nicht definiert!)

Es gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.




$$\begin{aligned} f_2: y &= x^{-2} = 1/x^2 \\ f_4: y &= x^{-4} = 1/x^4 \\ f_6: y &= x^{-6} = 1/x^6 \end{aligned}$$

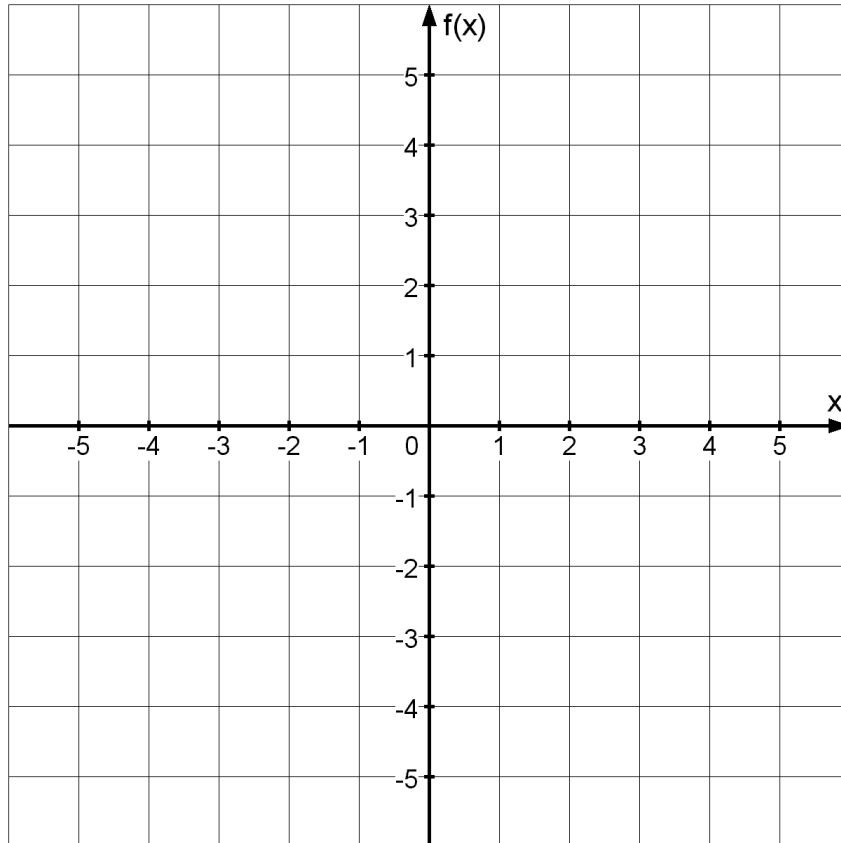
① Die Graphen nähern sich zwar immer mehr und mehr der x-Achse und auch der y-Achse, erreichen diese jedoch nie. In einem solchen Fall sagt man auch:

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote** des Graphen.

Die y-Achse ist eine **senkrechte Asymptote** des Graphen.

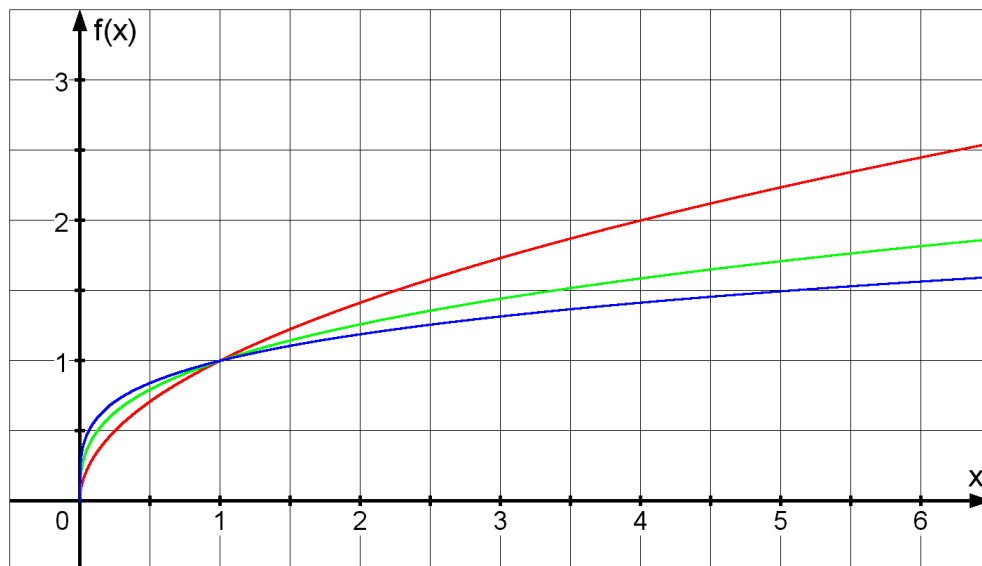
Auch hier betrachten wir ein Beispiel einer gestreckten und verschobenen Funktion, unter Beachtung der Bedeutung des Streckungsfaktors a und der Verschiebung in x-Richtung, um eine grobe Skizze des Graphen zu entwerfen.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{x-3}$ (Man bestimme auch den Schnittpunkt des Graphen mit der y -Achse.) 



16.9 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind nur für $x \geq 0$ definiert. Es gilt: $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$.

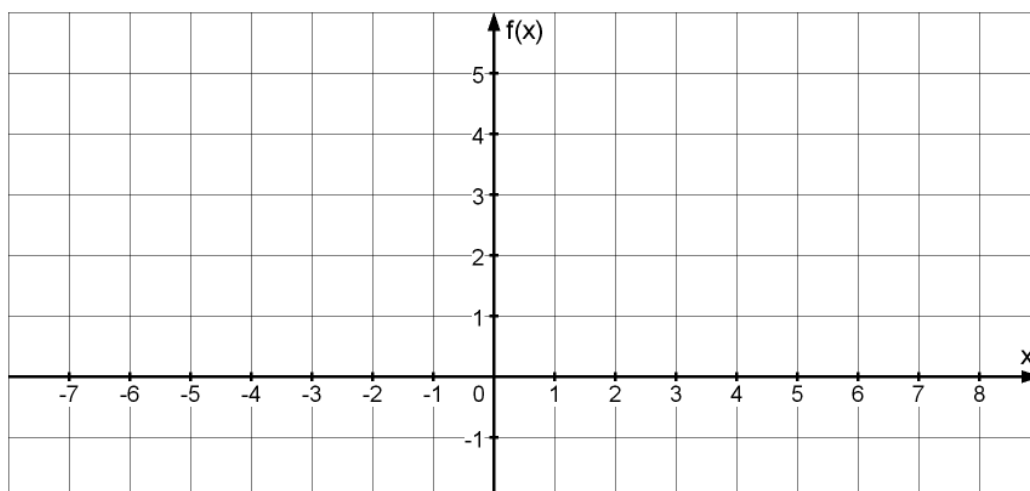


$$f_{1/2}: y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$f_{1/3}: y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

$$f_{1/4}: y = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$$

Beispiel: Man skizziere den Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x+5}$.

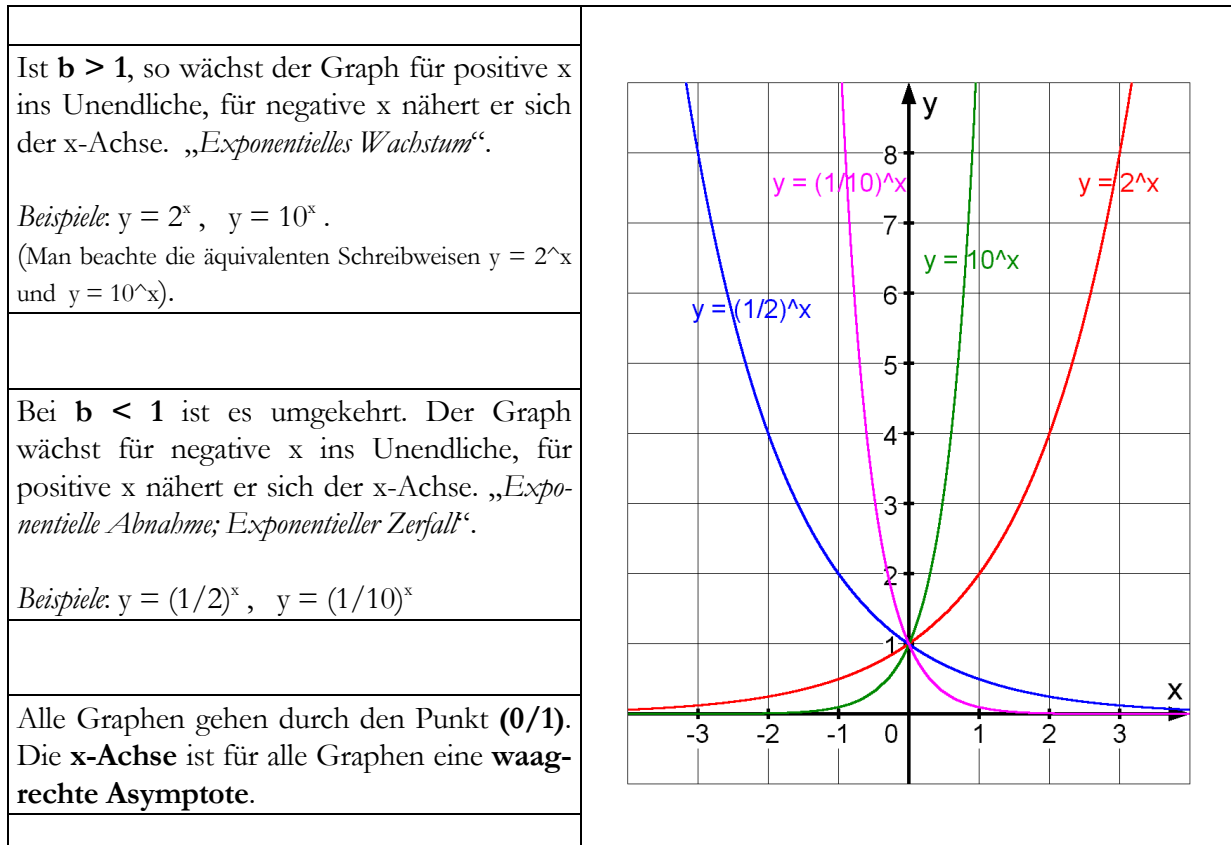


16.10 Exponential- und Logarithmusfunktionen

16.10.1 Die Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form $f: y = b^x$ ($b > 0$) heisst **Exponentialfunktion**.

Exponentialfunktionen haben wir bereits früher im Zusammenhang mit exponentiellem Wachstum und exponentieller Abnahme angetroffen (*Zinseszinsen etc...* . Vgl. Kapitel 15). Wir schauen uns die Graphen der Exponentialfunktionen an. Je nach Wahl der Basis b ergibt sich ein anderer Graph:

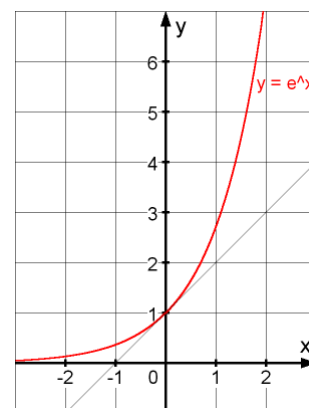


16.10.2 Die natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$

Unter allen Exponentialfunktionen gibt es genau eine, deren Graph im Punkt $(0/1)$ die Steigung 1 hat, also einen Winkel von 45° mit der x -Achse einschliesst.

Es handelt sich um die „natürliche Exponentialfunktion“ $f: y = e^x$.

Vgl. dazu auch Kapitel 12.1.4 „Der Natürliche Logarithmus \ln “ auf S.82.



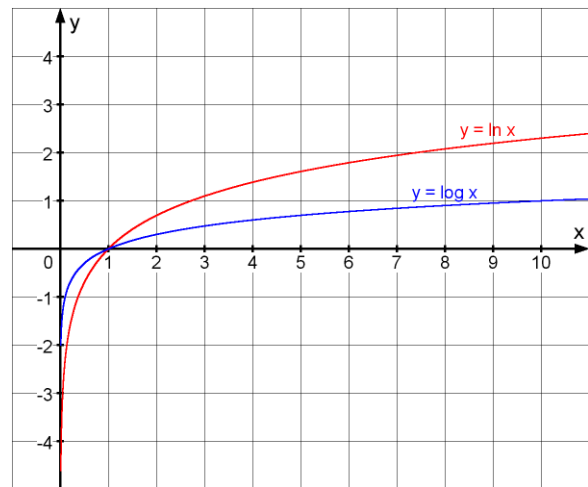
16.10.3 Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion $f: y = \log_b x$ ist die Umkehrung der Exponentialfunktion $y = b^x$.

Sie ist nur für $x > 0$ definiert (da ein Logarithmus nur für Zahlen grösser Null definiert ist. Vgl. 12.1.1 auf S.79.)

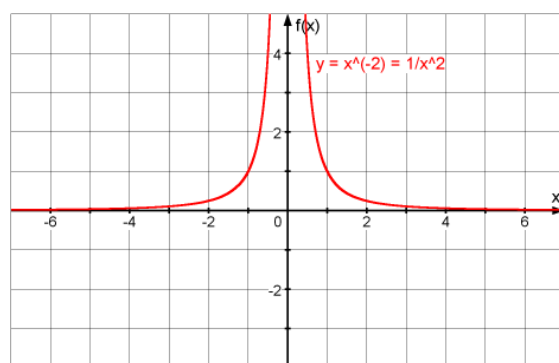
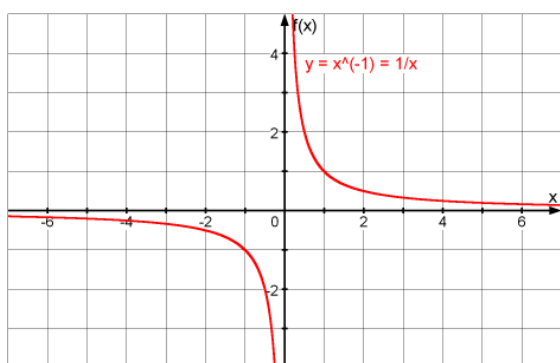
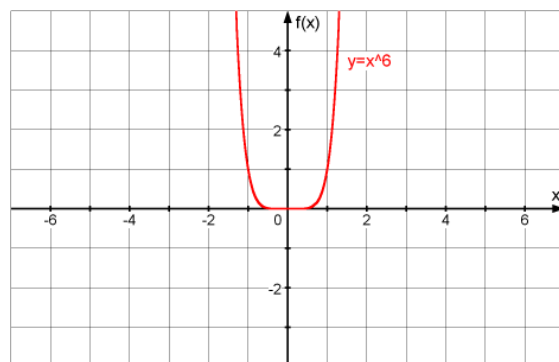
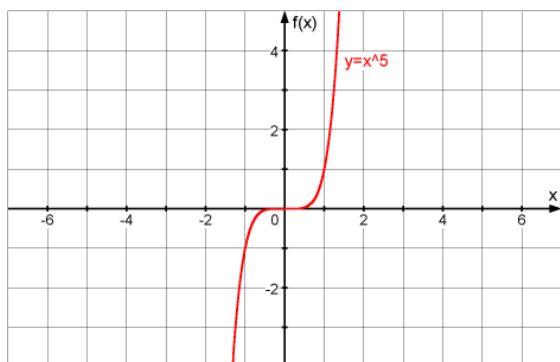
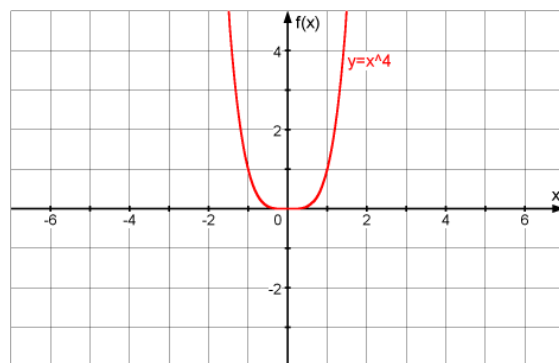
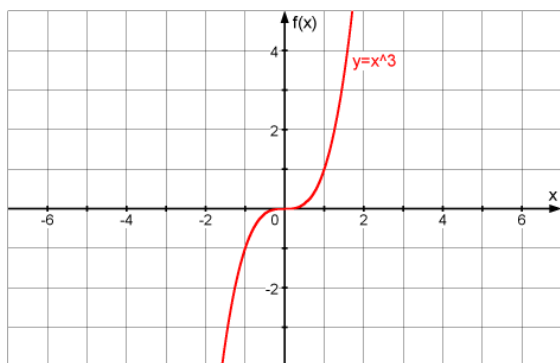
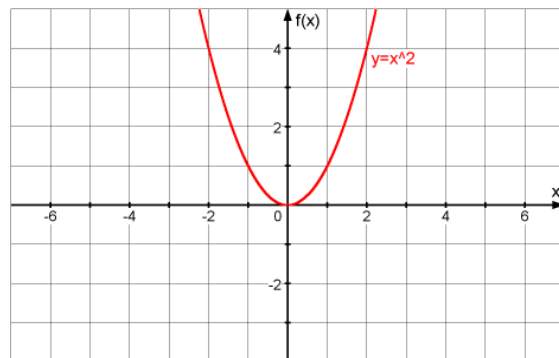
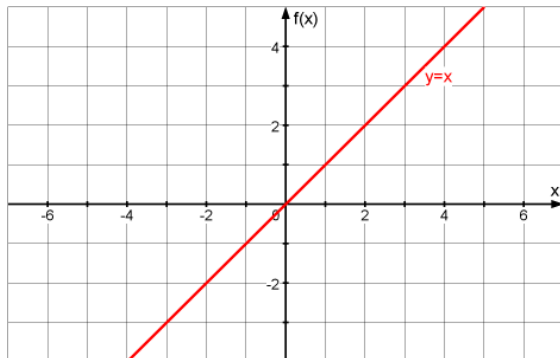
Die Abbildung zeigt die natürliche Logarithmusfunktion „ $y = \ln x$ “ und die Funktion des Zehnerlogarithmus „ $y = \log x$ “.

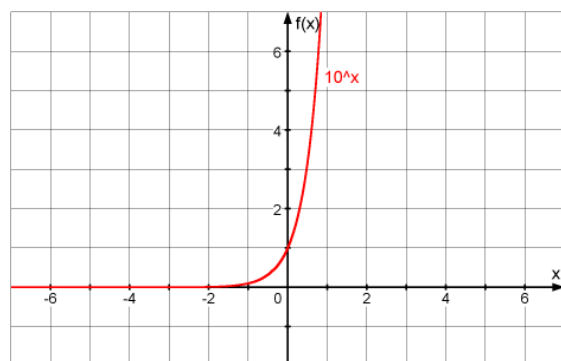
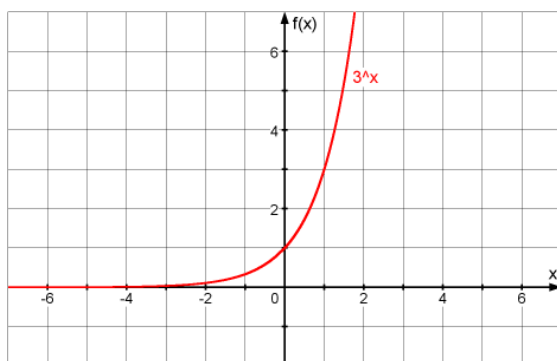
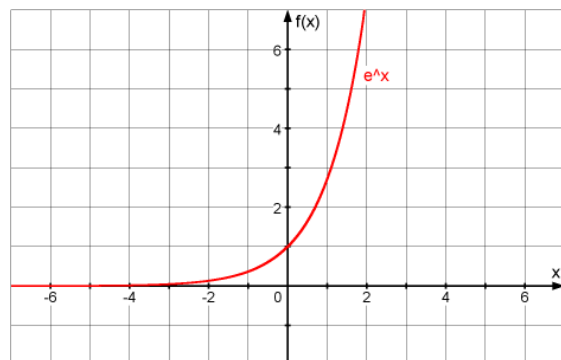
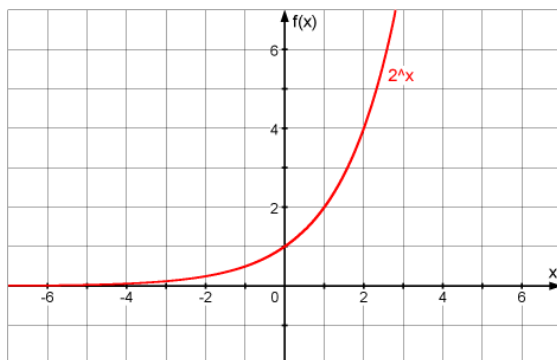
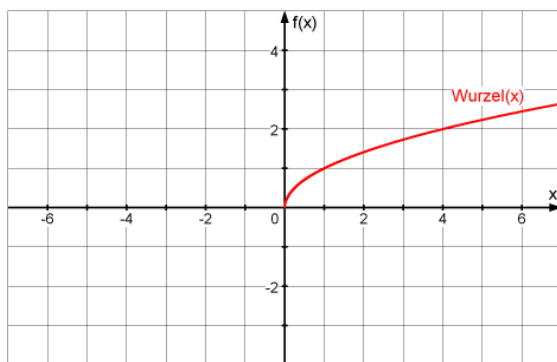
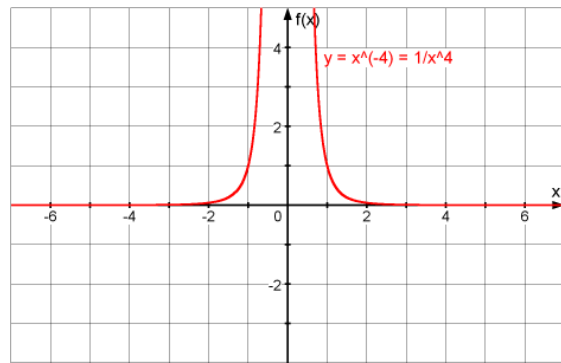
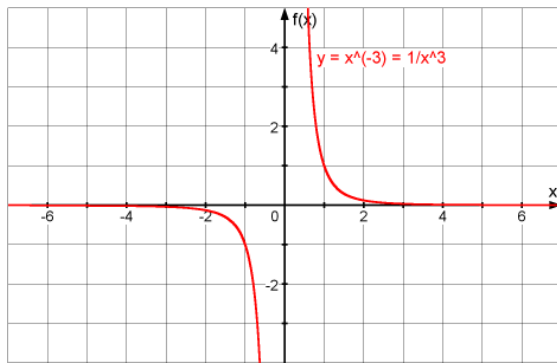
Jede Logarithmusfunktion geht durch den Punkt $(1/0)$ und hat als senkrechte Asymptote die y-Achse.

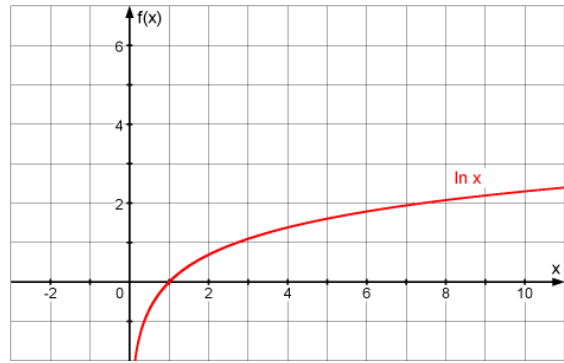
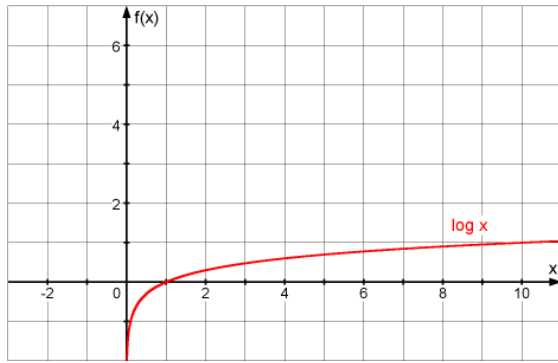


16.11 Gesamtübersicht der behandelten Graphen

Die folgenden Graphen sollte man stets präsent haben, wenn man sich mit Funktionen befasst.







16.12 Umkehrfunktionen

16.12.1 Ein einführendes Beispiel

Wir rufen das einführende Beispiel aus Kapitel 16.2.3 in Erinnerung:

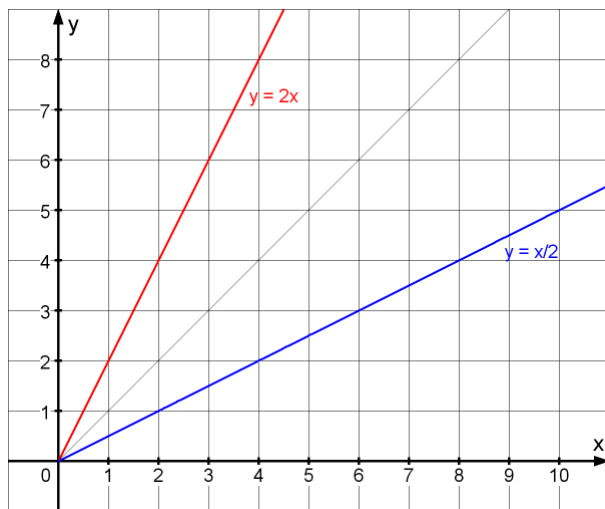
Beispiel: 1 kg Äpfel kostet 2 €. Wie viel kosten x kg?

Bezeichnen wir die Menge mit x , den Preis mit y , so lautet die Funktionsgleichung: $f: y = 2x$

Im obigen Beispiel entspricht auch jedem Preis genau eine Menge (z.B.: für 5 € erhält man 2,5 kg Äpfel). Die Menge ist also auch eine Funktion des Preises: $x = y/2$

Wenn man - der Einheitlichkeit halber - die unabhängige Variable wieder mit x bezeichnet, lautet die Gleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}: y = x/2$. (Mit "- der Einheitlichkeit halber -" sei hier gemeint, dass der Mathematiker sowohl die Funktion wie auch die Umkehrfunktion in das gleiche Koordinatensystem zeichnen möchte. Beide Funktionen sollen also von der Form $f(x)$ sein.)

Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ spiegelt:



16.12.2 Die Problematik der Umkehrfunktion

Aufgepasst: Nicht jede Funktion lässt sich ohne weiteres umkehren! Um das zu verstehen, frischen wir unsere **Grundkenntnisse über Funktionen** auf:

① Eine Funktion ist eine **eindeutige Zuordnung**, die jeder Zahl x der Definitionsmenge \mathbb{D} eine eindeutige Zahl zuordnet, genannt der Funktionswert $f(x)$, der auch mit y bezeichnet wird. Die Menge der vorkommenden Funktionswerte heisst Wertemenge \mathbb{W} .

Wir betrachten dazu das Beispiel: $f(x) = x^2$.

Definitionsmenge \mathbb{D}	$f(x) = x^2$	Wertemenge \mathbb{W}
... -2 -1 0 1 2 ... x	→ → → → → → →	... 4 1 0 1 4 ... f(x)

Dabei darf auch folgendes vorkommen:

$$\boxed{2 \rightarrow 4 \text{ und } -2 \rightarrow 4}.$$

Denn beide Zuordnungen sind eindeutig. (Gibt man als **Input 2** ein, kommt als eindeutiges **Output 4** raus. Gibt man als **Input -2** ein kommt als eindeutiges **Output 4** raus. Unsere „Input- Outputmaschine“ zeigt keine „Funktionsstörung“ auf.)

❶ Wollten wir die **Zuordnungen umkehren** (würden wir also das Band unserer „Input- Outputmaschine“ rückwärts laufen lassen), läge **keine Eindeutigkeit mehr** vor, denn die Zahl 4 hätte zwei Zuordnungen 2 und -2.

$$\boxed{\{2 \text{ und } -2\} \leftarrow 4}.$$

Dies widerspricht der Festsetzung, dass Funktionswerte-Zuweisungen eindeutig sein müssen. (Gibt man als **Input 4** ein, haben wir **kein eindeutiges Output** mehr. Dasselbe gilt für andere Inputs. Unsere „Input- Outputmaschine“ zeigt definitiv eine „Funktionsstörung“ auf.)

❶ Wenn es also einen y-Wert gibt, zu dem zwei verschiedene x-Werte gehören, dann gibt es keine Umkehrfunktion.

Frage: Lässt sich dieses Problem nicht irgendwie beheben?

Antwort: Ja! **Schränken wir** bei unserem Beispiel „ $f(x) = x^2$ “ die **Definitionsmenge auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ ein**, so können wir die Funktion ohne Zuordnungs-Probleme umkehren!

$$\boxed{2 \rightarrow 4 \text{ und umgekehrt } 2 \leftarrow 4}.$$

(Natürlich handelt es sich bei der Umkehrfunktion in diesem Fall um die **Wurzelfunktion**: $f^{-1}: y = \sqrt{x}$).

Wir geben drei Regeln zur Herleitung der Umkehrfunktion f^{-1} an:

16.12.3 Drei Regeln zur Herleitung der Umkehrfunktion f^{-1}

1) Man kontrolliere zunächst ob man bei der Ausgangsfunktion f eine eindeutige Zuordnung der Werte hat, und wähle einen **entsprechenden Definitionsbereich**.

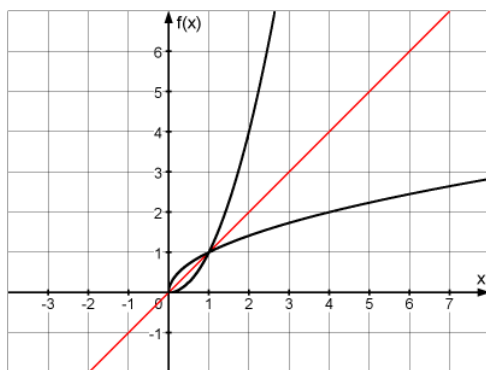
(Bsp.: Bei $f: y = x^2$ liegt zunächst keine eindeutige Zuordnung vor! Es werden etwa zwei verschiedene Werte auf 4 abgebildet: 2 und -2. Also müssen wir den Definitionsbereich \mathbb{D} auf \mathbb{R}_0^+ einschränken! Dann wird der Wert -2 ausgeschlossen!)

2) Aus $y = f(x)$ erhält man $y = f^{-1}(x)$, indem man $y = f(x)$ **nach x auflöst** und dann die **Variablen vertauscht**.

(Bsp.: Nachdem wir bei $y = x^2$ den Definitionsbereich auf \mathbb{R}_0^+ eingeschränkt haben, können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhalten $\sqrt{y} = x$. Nun vertauschen wir die Variablen und erhalten: $\sqrt{x} = y$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ lautet somit: $y = \sqrt{x}$.)

3) Den **Graphen der Umkehrfunktion** gewinnt man durch **Spiegelung** des Graphen der Ausgangsfunktion **an der Geraden $y = x$** .

(Bei unserem Beispiel sieht das folgendermassen aus):



17 FORMELSAMMLUNG

17.1 Algebra

Binomischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

17.2 Mengenlehre

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Rationale Zahlen: \mathbb{Q} : Alle Zahlen, welche als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden können.

Reelle Zahlen: \mathbb{R} : Dies ist die Menge aller Zahlen. Somit die Vereinigung der rationalen und der irrationalen Zahlen.

Rationale Zahlen führen in der Dezimalschreibweise zu endlichen oder zu unendlichen, periodischen Dezimalbrüchen.

Beispiele von irrationalen Zahlen

$\sqrt{2} = 1.414213562373\dots$	(Wurzel aus 2)
$\sqrt{3} = 1.732050807568\dots$	(Wurzel aus 3)
$\pi = 3.14159265358979\dots$	(Pi = „Umfang : Durchmesser“ eines Kreises)
$e = 2.71828182845\dots$	(Basis des natürlichen Logarithmus)

17.3 Wurzeln und Potenzen

Rechenregeln für n-te Wurzeln:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; Für Summen gibt es keine entsprechende Regel.

Die 5 Potenzgesetze: (für beliebige Exponenten n)

Gleiche Exponenten: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ Gleiche Basen: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potenzieren von Potenzen: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Definitionen: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

17.4 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form der **quadratischen Gleichung**: $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Für die Lösung(en) gilt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$, dabei ist D die Diskriminante, $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Ist $D > 0$ dann besitzt die Gleichung zwei verschiedene Lösungen.

Ist $D = 0$ dann besitzt die Gleichung nur eine Lösung.

Ist $D < 0$ dann besitzt die Gleichung keine (reelle) Lösung.

17.5 Logarithmen

Logarithmen: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ("Logarithmus von b zur Basis a")

Als Basis eines Logarithmus eignen sich nur Zahlen a mit $a > 0$ und $a \neq 1$. Gebräuchlich sind die Logarithmen zu den Basen 10 ("Zehnerlogarithmus", \log) und zur Basis e ("natürlicher Logarithmus", \ln)

Lösung einer einfachen Exponentialgleichung: $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Für alle Basen gelten die folgenden **Gesetze**: $\log(p \cdot q) = \log p + \log q$

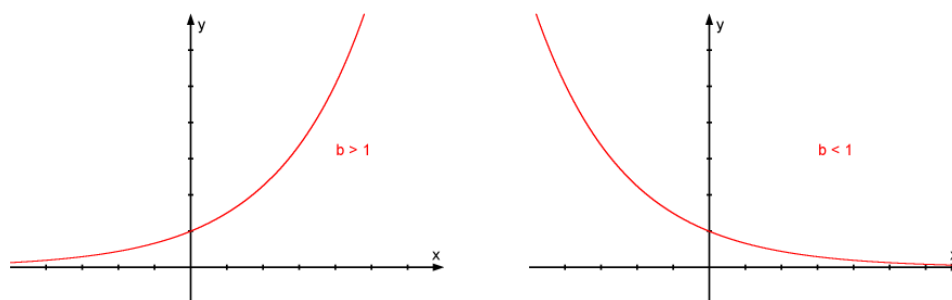
$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

$$\log p^n = n \cdot \log p$$

Für negative p existiert $\log p$ nicht!

17.6 Exponentialfunktionen, Wachstum und Zerfall

Exponentialfunktionen: $y = b^x$ mit $b > 0$.



Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall:	$y = a \cdot b^x$	$a =$ Anfangszustand (z.B. K_0) $x =$ Dauer (z.B. n) $b =$ Wachstums faktor falls $b > 1$ (z.B. $1+i$) $b =$ Abnahme (Zerfalls)faktor falls $b < 1$ (z.B. $1-i$) $y =$ Endzustand (z.B. K_n)
---	-------------------	---

Speziellfall:

Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$	$K_0 =$ Anfangskapital $n =$ Laufzeit (in Jahren) $p =$ Zinsfuß (z.B. $p = 3.5$) $i =$ Zinssatz mit $i = \frac{p}{100}$ (z.B. $i = 0.035$) $K_n =$ Endkapital (Kapital nach der Laufzeit n)
---------------------------------------	--

17.7 Lineare Funktionen

Allgemeine Form der linearen Funktion: $y = m \cdot x + n$.

Der **Funktionsgraph** im Koordinatensystem ist eine **Gerade**. Diese schneidet die y -Achse bei $y = n$. Die **Steigung** der Geraden ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ „Höhenunterschied dividiert durch horizontale Distanz“.

Ist bekannt, dass eine **Gerade durch zwei Punkte** $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ verläuft, kann die Steigung berechnet werden durch: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Spezialfälle: Konstante Funktion: „ $y = c$ “ und Senkrechte Gerade: „ $x = c$ “.

17.8 Quadratische Funktionen

Allgemeine Form der quadratischen Funktion: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Der **Funktionsgraph** im Koordinatensystem ist eine **Parabel**, deren Symmetrieachse parallel zur y -Achse bei $x = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt. Dies ist auch gleichzeitig die x -Koordinate des **Scheitelpunktes S**.

Für die Koordinaten des Scheitelpunkts gilt: $S(-\frac{b}{2a} / -\frac{D}{4a})$.

Ist $a > 0$, dann ist die Parabel nach oben geöffnet

Ist $a < 0$, dann ist die Parabel nach unten geöffnet

Die **Nullstellen** der Parabel (= Schnittpunkte mit der x -Achse) findet man beim Auflösen der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

18 SCHLUSSTEST

Termumformungen

a) Kürzen Sie den folgenden Quotienten: $\frac{4x^2 + 20xy + 25y^2}{6x^2 + 23xy + 20y^2}$

b) Bestimmen Sie die folgende Summe: $\frac{x-a}{5x+3} - \frac{x+a}{5x-3} + \frac{(4a+6)x}{25x^2-9}$

c) Führen Sie die folgende Division durch: $\frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{5ab}{3c} + \frac{ab}{5c} \right)$

Gleichungen

d) Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung 4. Grades:

$$x^4 - 20x^2 + 80 = 0$$

e) Ein erstes Kapital, das 5.5 % Zinsen trägt, bringt ebensoviel ein wie ein zweites Kapital, das zu 6.5 % ausgeliehen ist. Wäre umgekehrt das erste zu 6.5 % und das zweite zu 5.5 % angelegt, so wäre der Jahreszins beider Kapitalien um 20 Fr. grösser als vorher. Wie gross sind die beiden Kapitalien?

f) Man bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$x \cdot (x^2 + 12x + 27) \cdot (2x - 0.5) \cdot (x + 3) = 0$$

g) Man löse nach x auf:

$$7^{x+3} : 7^2 = 49^{2x}$$

$$2 \cdot 3^x = 7^{x-3}$$

h) Man löse die folgende Bruchgleichung:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 18} = \frac{1}{3}$$

Funktionen

i) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und allfällige Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

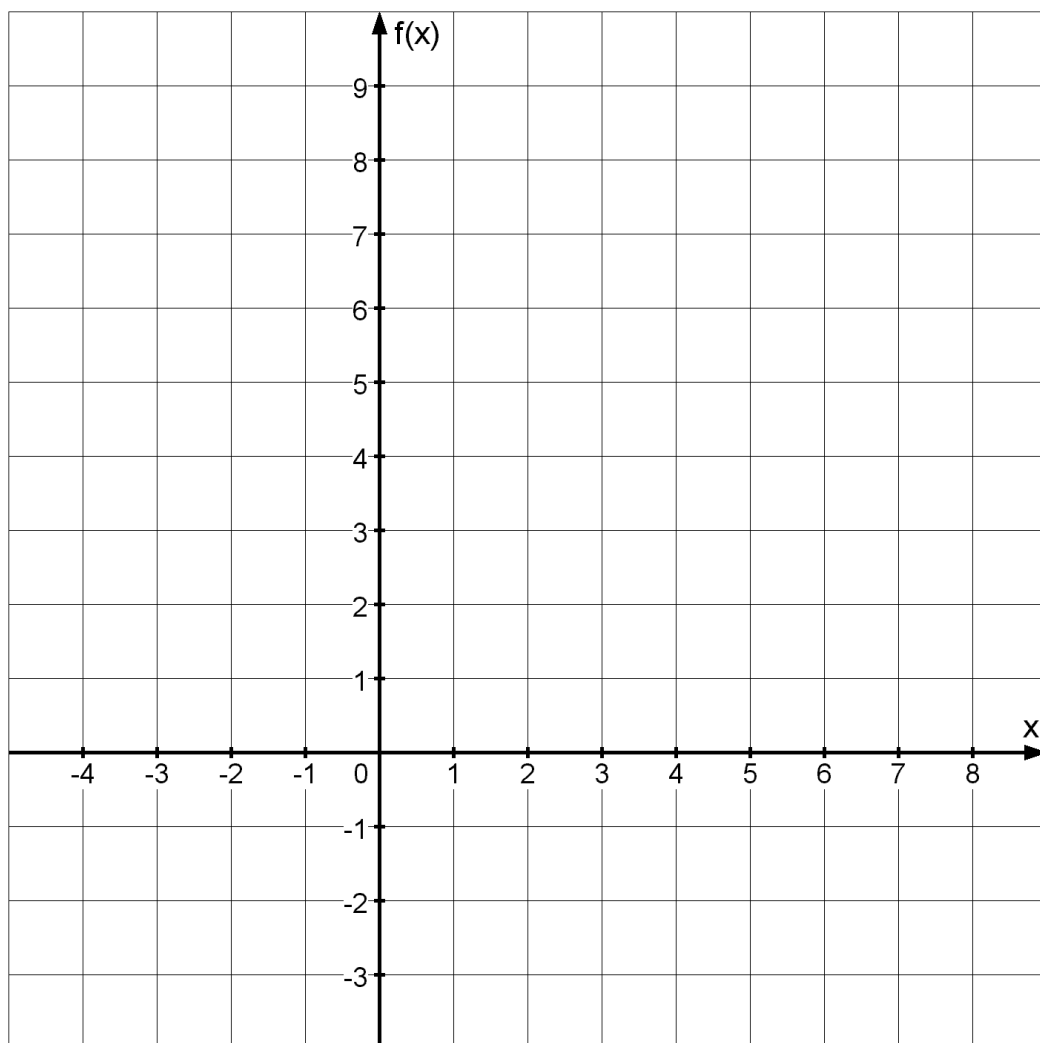
j) Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = -x^2 + 9$$

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

$$f(x) = \log x$$



k) Wir betrachten nun speziell die zwei Funktionen $f(x) = 2x + 3$ und $f(x) = -x^2 + 9$. Bestimmen Sie (rechnerisch!) die Schnittpunkte der Graphen.

18.1 Lösungen zum Schlusstest

Termumformungen

$$\text{a) } \frac{4x^2 + 20xy + 25y^2}{6x^2 + 23xy + 20y^2} = \frac{(2x+5y)^2}{(2x+5y)(3x+4y)} = \underline{\underline{\frac{2x+5y}{3x+4y}}}$$

$$\text{b) } \frac{x-a}{5x+3} - \frac{x+a}{5x-3} + \frac{(4a+6)x}{25x^2-9} = \frac{(x-a)(5x-3) - (x+a)(5x+3) + (4a+6)x}{(5x-3)(5x+3)} =$$

$$\frac{5x^2 - 3x - 5ax + 3a - 5x^2 - 3x - 5ax - 3a + 4ax + 6x}{(5x-3)(5x+3)} = \underline{\underline{\frac{-6ax}{(5x-3)(5x+3)}}}$$

$$\text{c) } \frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{5ab}{3c} + \frac{ab}{5c} \right) = \frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{25ab+3ab}{15c} \right) = \frac{21a^2b}{10c^2} \cdot \frac{15c}{28ab} = \underline{\underline{\frac{9a}{8c}}}$$

Gleichungen

d) *Lösungsidee:* Es handelt sich um eine biquadratische Gleichung. Also, substituieren: $z = x^2$.

$$x^4 - 20x^2 + 80 = 0 \rightarrow z^2 - 20z + 80 = 0 \quad (\text{Quadratische Gleichung für } z)$$

$$D = 400 - 320 = 80; \quad z_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{2}; \quad z_1 \approx 14.472 \quad \& \quad z_2 \approx 5.527$$

$$\text{Zurücksubstituieren: } x^2 = 14.472 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{14.472} \quad \& \quad x^2 = 5.527 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{5.527}$$

Somit ist die Lösungsmenge: $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{3.80; -3.80; 2.35; -2.35\}}}$.

e) Es bezeichne x das erste Kapital und y das zweite Kapital. Das Gleichungssystem ergibt sich unmittelbar aus dem Text:

$$1) \quad 0.055 \cdot x = 0.065 \cdot y$$

$$2) \quad 0.065 \cdot x + 0.055 \cdot y - 20 = 0.055 \cdot x + 0.065 \cdot y$$

Wir lösen die Gleichung 2) nach x auf: $x = 2000 + y$, und setzen dann in die Gleichung 1) ein. Dies ergibt: $y = 11000$ und schliesslich auch: $x = 13000$.

f) Ausmultiplizieren bringt uns bestimmt nicht weiter! Links vom Gleichheitszeichen haben wir ein Produkt von vier Faktoren, und rechts haben wir 0. Die *Idee* hier: *Das Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.* Also schauen wir, wann die Faktoren 0 werden:

1. Faktor: Für $\underline{x = 0}$. (Klar!)
2. Faktor: $(x^2 + 12x + 27)$ wird 0 für $\underline{x = -3}$ und für $\underline{x = -9}$. (Probiermethode, oder Formel).
3. Faktor: $(2x - 0.5)$ wird 0 für $\underline{x = 0.25}$.
4. Faktor: $(x + 3)$ wird 0 für $\underline{x = -3}$. (Hatten wir schon, also keine zusätzliche Lösung.)

Zusammenfassend haben wir die folgende Lösungsmenge erhalten:

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{0; -3; -9; 0.25\}}}.$$

g) $7^{x+3} : 7^2 = 49^{2x}$

Halt! Logarithmieren ist hier nicht der „beste“ Lösungsweg. Idee: Exponentenvergleich!

Wir sehen, dass die gemeinsame Basis 7 vorkommt. Durch das Anwenden der Potenzregeln erhalten wir:

$$7^{x+1} = 7^{4x} \quad \text{und aus dem Exponentenvergleich folgt: } x + 1 = 4x.$$

Nach x aufgelöst ergibt das: $x = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

Bei $2 \cdot 3^x = 7^{x-3}$ hingegen ist logarithmieren angesagt:

$$\log 2 + x \cdot \log 3 = (x - 3) \cdot \log 7$$

$$\log 2 + x \cdot \log 3 = x \cdot \log 7 - 3 \cdot \log 7$$

$$\log 2 + 3 \cdot \log 7 = x \cdot \log 7 - x \cdot \log 3$$

$$\log 2 + 3 \cdot \log 7 = x \cdot (\log 7 - \log 3)$$

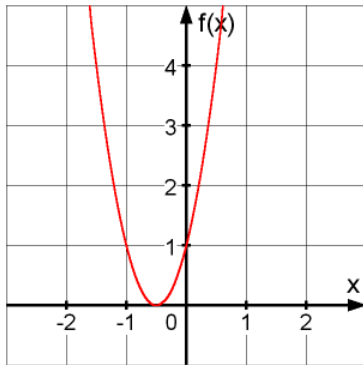
$$\frac{\log 2 + 3 \cdot \log 7}{(\log 7 - \log 3)} = x = \underline{\underline{7.708}}$$

h) Hauptnenner: $3 \cdot 2 \cdot (x - 3)(x + 3)$; Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner und das Vereinfachen der Gleichung führen auf die quadratische Gleichung $x^2 + 9x - 36 = 0$, mit den Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = -12$. Da x_1 **nicht** zur Definitionsmenge gehört, ist die Lösungsmenge der Gleichung $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-12\}}}$.

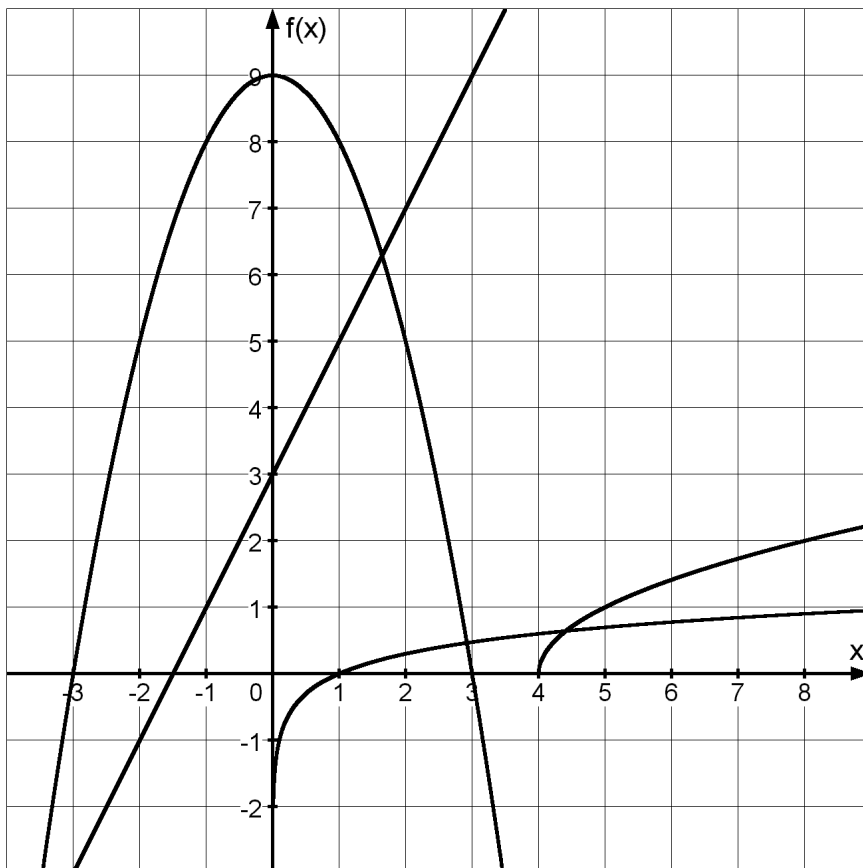
Funktionen

f) Es gilt: $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$. Somit wissen wir, dass der Graph eine Parabel ist, die den Scheitelpunkt bei $x = -0.5$ auf der Abszisse hat. (Natürlich könnte man auch die Scheitelbestimmungsformel anwenden!) Man sieht auch sofort, dass die Parabel die y -Achse auf der Höhe $y = 1$ schneidet ($x=0$ einsetzen!). Die Parabel ist nach oben geöffnet und steiler als die Normalparabel (dies wegen des **Koeffizienten 4** bei x^2). Die Skizze des Graphen sieht also folgendermassen aus:



g) Graphen folgender Funktionen:

$$f(x) = 2x + 3; \quad f(x) = -x^2 + 9; \quad f(x) = \sqrt{x - 4}; \quad f(x) = \log x:$$



k) Um die Schnittpunkte der beiden Funktionen $f(x) = 2x + 3$ und $f(x) = -x^2 + 9$ zu bestimmen, müssen wir die Funktionsgleichungen einander gleichsetzen!

Wir erhalten: $2x + 3 = -x^2 + 9$

Dies ist eine quadratische Gleichung für x . Die Normalform lautet:

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

Mit der Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ erhalten wir: $x_1 \approx 1.645$ und $x_2 \approx -3.645$.

Bedeutung: Dies sind die x -Koordinaten der Schnittpunkte. Wollen wir noch die dazugehörigen y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen, müssen wir x_1 und x_2 in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen. Wir erhalten: $y_1 \approx 6.29$ und $y_2 \approx -4.29$.

Somit lauten die Schnittpunkte: **$S_1(1.645/6.29)$ und $S_2(-3.645/-4.29)$.**

Dieses Resultat scheint auch im Vergleich mit der Zeichnung der Graphen (siehe oben) zu stimmen.

Man merke sich jedoch: Die genauen Koordinaten eines Schnittpunktes zu bestimmen, bedeutet nicht die Koordinaten aus der Zeichnung abzulesen, sondern diese rechnerisch (durch gleichsetzen der Funktionsgleichungen) herzuleiten. Zudem kann ein Schnittpunkt auch mal ausserhalb der Zeichnung liegen (wie etwa S_2), und dann bleibt nur noch die rechnerische Methode!

19 ANHANG

19.1 Die „Wurzel aus 2“ als Beispiel einer irrationalen Zahl

Behauptung: „ $\sqrt{2}$ “ ist kein Element aus \mathbb{Q} und somit *nicht als Bruch darstellbar*.

Beweis (durch Widerspruch¹):

Nehmen wir an $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, dann liesse sich $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

Ausserdem setzen wir voraus, dass der Bruch vollständig gekürzt ist, dass also a und b zwei teilerfremde ganze Zahlen sind. (Man kann jeden Bruch soweit kürzen, bis man nicht weiter kürzen kann;

Und das haben wir mit unserem Bruch „ $\frac{a}{b}$ “ gemacht!)

Im Folgenden werden wir durch einige Umformungen sehen, dass der Bruch, den wir als nicht weiter kürzbar vorausgesetzt haben, doch gekürzt werden kann, weil wir sowohl a als auch b durch 2 teilen werden! Damit erzeugen wir einen Widerspruch, was bedeutet, dass es keinen solchen Bruch geben kann.

Durch Quadrieren beider Seiten erhält man:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Multipliziert man beide Seiten mit b^2 , so ergibt sich:

$$a^2 = 2b^2.$$

Wenn nun aber a^2 doppelt so gross ist wie b^2 , so ist a^2 sicher eine gerade Zahl. Damit ist aber auch a eine gerade Zahl, denn nur gerade Zahlen ergeben mit sich selbst malgenommen wieder gerade Zahlen! Man kann also a durch 2 teilen und erhält auf jeden Fall wieder eine ganze Zahl a' . Wir können also schreiben:

$$a = 2a'$$

Damit erhält man:

$$(2a')^2 = 2b^2$$

oder

$$4a'^2 = 2b^2$$

¹ *Widerspruch-Beweis*, oder auch *indirekter Beweis* genannt: Man nimmt das Gegenteil der Behauptung als gültig an und leitet daraus einen Widerspruch her. Folglich muss die Behauptung wahr sein.

Werden beide Seiten durch 2 dividiert, so erhält man

$$2a'^2 = b^2$$

und das Spiel geht von vorne los. Denn dies bedeutet, dass auch b^2 und damit auch b eine gerade Zahl ist. Wenn jedoch a und b gerade Zahlen sind, so ergibt sich hier ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a und b teilerfremde Zahlen sind und der Bruch vollständig gekürzt war.

Somit war unsere Annahme falsch! $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen, und ist deshalb keine rationale Zahl, (sondern eine sogenannte *irrationale* Zahl).

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots \quad (\text{wird } \textit{nie} \text{ periodisch!})^1$$

¹ Bereits Hippasos von Metapont (5. Jahrhundert v. Chr.) hat ganz ähnlich bewiesen, dass Wurzel(2) irrational ist. Weil das der Proportionenlehre der alten Griechen widersprach, wurde Hippasos im Meer ertränkt - sein Beweis hat jedoch die Jahrtausende unbeschadet überstanden. [Quelle: Internet]

Auf ähnliche Weise kann man beweisen, dass die Wurzel aus 3, oder gar jede Wurzel aus einer Primzahl irrational ist. Da es unendlich viele Primzahlen gibt (vgl. dazu 19.2), kann man somit sagen, dass es unendlich viele irrationale Zahlen gibt.

19.2 Beweis der Unendlichkeit der Primzahlfolge¹

Behauptung:

Es gibt unendlich viele Primzahlen und somit gibt es keine „grösste Primzahl“.

Beweis (durch Widerspruch):

Angenommen es gäbe eine grösste Primzahl P , dann bildet man die natürliche Zahl N

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots P) + 1,$$

die das um 1 vermehrte Produkt sämtlicher Primzahlen einschliesslich P ist.

Wir betrachten die Primfaktorzerlegung dieser Zahl N :

Die Zahl N ist durch keine der Primzahlen bis P teilbar, da sie bei jeder Teilung den Rest 1 lässt.

Also ist N

1) entweder selbst Primzahl

oder

2) hat Primzahlen als Teiler, die in der Folge 2, 3, ..., P nicht auftreten.

Beides steht aber im Widerspruch zu der Annahme, P sei die grösste Primzahl.

Also ist die Folge der Primzahlen unendlich!

19.2.1 Exkurs über Primzahlzusammenhänge

19.2.1.1 Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge sind immer zwei Primzahlen, die die Differenz zwei haben.

Beispiele: 5 und 7, 17 und 19, 41 und 43.

Bis heute ist unklar, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

19.2.1.2 Die Goldbachsche Vermutung

Jede gerade natürliche Zahl (ausser 2) ergibt sich als Summe von zwei Primzahlen.

Beispiele: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$, $10=7+3$, $12=7+5$, etc.

Dies ist die *bisher ebenfalls unbewiesene*² goldbachsche Vermutung.

¹ Dieser Beweis geht auf den griechischen Mathematiker Euklid zurück. Euklid, geboren um 365 v. Chr., gestorben um 300 v. Chr. Primzahlen spielen für moderne Verschlüsselungsmethoden etwa im Internet eine grosse Rolle. Die zur Zeit (04/12/2003) grösste, bekannte Primzahl ist 6'320'430 Stellen lang und lautet in Potenzschreibweise: $2^{20'996'011} - 1$.

² Sie sehen: In der Mathematik sind noch lange nicht alle Fragen geklärt. Die Vermutung ist zwar leicht zu verstehen, deren Beweis hat bis heute jedoch noch keiner erbracht (trotz gelegentlichem Preisausschreiben bis zur 1 Million Dollar.)

19.3 Grundlegendes zu den Begriffen Variable, Term und Polynome

19.3.1 Variable

Definition:

Wir bezeichnen Buchstaben (und andere Zeichen), welche Platzhalter für Zahlen sind, als **Variable**.

Das Wort Variable stammt aus dem Lateinischen und bedeutet *Veränderliche*. Was ist hier veränderlich? Offenbar die Einsetzung anstelle der Buchstaben (=Platzhalter).

19.3.2 Term

Definition:

Unter einem **Term** (Ausdruck) versteht man eine sinnvolle Zusammenstellung von Zahlen und Variablen mit Operationszeichen und Klammern.

Ersetzt man alle Variablen eines Terms mit zulässigen Zahlen, so ergibt sich eine Zahl, der sog. **Wert des Terms** für die eingesetzten Zahlen.

Bemerkungen:

1) Auch einzelne Variablen oder Zahlen kann man als Terme bezeichnen.

2) Der Wert eines Terms hängt natürlich von der eingesetzten Zahl ab. Ergeben zwei verschiedene Terme für jede Einsetzung den gleichen Wert, so spricht man von **äquivalenten Termen**. Ein Beispiel dazu wären die Terme: „ $a + a + b + b$ “ und „ $2(a + b)$ “.

19.3.3 Polynome

Definition:

Unter einem ¹**Polynom** versteht man einen Term, der aus Zahlen und Variablen durch Addition und Multiplikation entsteht.

Polynome sind also spezielle Terme. *Beispiele:*

$-8ab^2cd$	1 gliedriges Polynom oder <i>Monom</i>
$5yz + 2z^3$	2 gliedriges Polynom oder <i>Binom</i>
$0.7u - v - w$	3 gliedriges Polynom oder <i>Trinom</i>
$x^5 + x^4 - x + 9$	4 gliedriges Polynom

Das Monom $-8ab^2cd$ besteht aus dem „Namen“ ab^2cd und dem ²**Koeffizienten** -8 .

Beispiele für Terme, die keine Polynome sind: $\frac{1}{x}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $|x - 5|$, 2^y .

(Es dürfen also keine Variablen im Nenner, unter der Wurzel, in einem Betrag, oder im Exponenten stehen.)

Als Polynom in einer Variablen x bezeichnet man Terme wie die folgenden: $3x^2 + 4x - 17$, oder $0.3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 1$.

¹ Polynom: [von griechisch polys „viel“ und lateinisch nomen „Name“]

² Koeffizient (*auch Beizahl genannt*) [lateinisch con „zusammen mit“ und efficiens „bewirkend“]

19.4 Binomische Formeln für höhere Potenzen

Die binomischen Formeln gelten auch für höhere Potenzen von Summen (und Differenzen). Wir betrachten etwa die binomische Formel für die **dritte Potenz** :

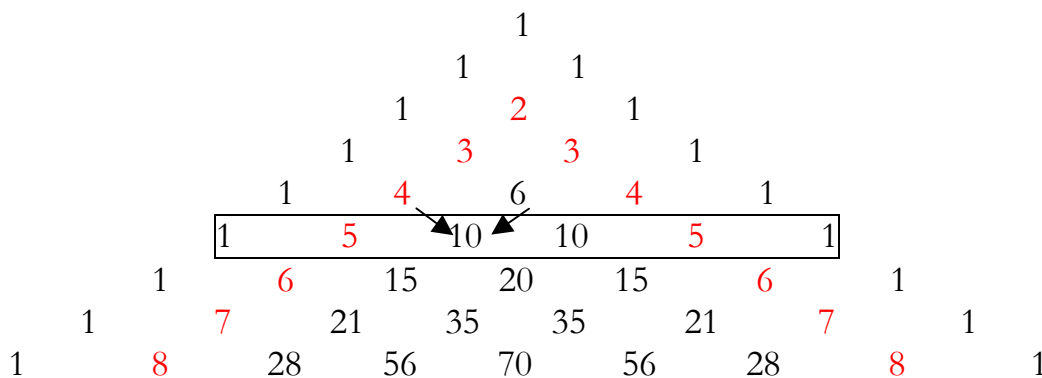
$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Binomial-
koeffizienten

Aussenglieder

Dabei stellt man folgendes fest:

Die beiden Aussenglieder des rechten Ausdrucks haben genau dieselbe Potenz wie der linke Ausdruck. Das ist bei jeder höheren Potenz so. Das Interessante ist nun, dass für höhere Potenzen die Binomialkoeffizienten eine bestimmte Gesetzmässigkeit aufweisen. Für diese Gesetzmässigkeit der Binomialkoeffizienten gibt es eine grafische Darstellung, die als **PASCAL'sches Zahlendreieck** bekannt ist.



Jeder Koeffizient einer Zeile ist die Summe der beiden darüber stehenden Koeffizienten (4 + 6 = 10.) Die Aussenglieder haben immer den Koeffizienten 1. Man muss nun in Gedanken hinter den Koeffizienten die beiden Summanden **a** und **b** aus dem Binom ergänzen. Dabei wird **a** nach fallenden Potenzen und **b** nach steigenden Potenzen geordnet.

Zum Beispiel : $(a + b)^5$

$$a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

fallende Potenzen bei **a**

steigende Potenzen bei **b**

Im „-“ Fall wechseln sich aufeinander folgende Zeichen immer ab, beginnend mit einem Plus.

Beispiel : $(a - b)^5 = (+) a^5 - 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 - 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 - b^5$

¹ Benannt nach dem französischen Mathematiker Blaise PASCAL (1623 - 1662)

19.5 Beweis der Rechenregeln für Logarithmen

Es folgt ein Beweis der folgenden Rechenregeln für Logarithmen

$$1) \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2) \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3) \log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$$

Für den Beweis dieser Regeln brauchen wir lediglich die Potenzgesetze und die folgende Definition für den Logarithmus: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (wobei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$)

Beweis:

1) Wir gehen von den beiden Potenzgleichungen

$$a^x = b \quad \text{und} \quad a^y = c$$

aus und formen diese in logarithmische Gleichungen um:

$$x = \log_a b \quad \text{und} \quad y = \log_a c$$

Wir betrachten nun das Produkt:

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c$$

Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben:

$$a^{(x+y)} = (b \cdot c)$$

Die Umformung in eine logarithmische Gleichung ergibt:

$$x + y = \log_a(b \cdot c)$$

Mit

$$x = \log_a b \quad \text{und} \quad y = \log_a c$$

gilt dann:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$$

2) Die Überlegungen sind ganz ähnlich zu „1)“. Wir formulieren deshalb etwas knapper:

Es sei gegeben:

$$a^x = b \quad \text{und} \quad a^y = c$$

In logarithmische Gleichungen umgeformt, haben wir:

$$x = \log_a b \quad \text{und} \quad y = \log_a c$$

Wir betrachten nun den Quotienten (der nach den Potenzregeln umgeformt wird):

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow a^{(x-y)} = \frac{b}{c}$$

Die Umformung in eine logarithmische Gleichung (und die Einsetzung für x und y) ergibt:

$$x - y = \log_a \left(\frac{b}{c} \right) \Leftrightarrow \log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

3) Die Überlegungen sind ganz ähnlich zu „1)“ und „2)“. Wir formulieren deshalb etwas knapper:

Es sei gegeben:

$$a^x = b$$

In eine logarithmische Gleichung umgeformt, erhalten wir:

$$x = \log_a b$$

Wir potenzieren den Ausdruck „ $a^x = b$ “ auf beiden Seiten mit c:

$$(a^x)^c = b^c$$

Nach den Potenzregeln können wir auch schreiben:

$$a^{(c \cdot x)} = b^c$$

Die Umformung in eine logarithmische Gleichung ergibt:

$$c \cdot x = \log_a (b^c)$$

Mit

$$x = \log_a b$$

gilt dann:

$$c \cdot \log_a b = \log_a (b^c).$$

19.6 Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Das kgV von Zahlen (resp. von Termen) ist der kleinste Ausdruck der die Zahlen (resp. die Terme) enthält. Eine Hauptanwendung des kgV's ist das Bestimmen des Hauptnenners bei der Addition von Brüchen (vgl. dazu 3.5.2 auf S.28). Auch beim Lösen von Bruchgleichungen bestimmen wir das kgV der Nenner, um damit beide Seiten der Bruchgleichung zu multiplizieren und die Nenner wegzuschaffen (vgl. dazu 6.5 auf S.52).

Die folgenden Schemata sollten selbsterklärend sein.

Ermittlung des kgV's mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung:	
Beispiel: $\text{kgV}(240; 300)$ $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> $\text{kgV}(240; 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 1200$	Das kgV ist das Produkt aller Primfaktoren der ersten Zahl und der Primfaktoren die in der zweiten Zahl noch zusätzlich vorkommen.

Schema zur Bestimmung des kgV's von zwei Termen:

Terme	Faktorzerlegung	Primfaktorzerlegung
$30a - 45b$	$15(2a - 3b)$	$3 \cdot 5 \cdot (2a - 3b)$
$20a - 30b$	$10(2a - 3b)$	$2 \cdot 5 \cdot (2a - 3b)$
kgV		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2a - 3b) = 30(2a - 3b)$

Bemerkung:

Ein solches Schema ist nicht immer notwendig, denn oft sieht man das kgV sofort!

Dazu ein Beispiel:

Man bestimme das kgV von $12a$, $5ac$ und von $15b$.

Mit etwas Zahlengeschick sieht man sofort:

$$\underline{\underline{\text{kgV} = 60abc}}$$

Bemerkung: Bei der Bestimmung des kgV's von Termen kommt man ohne die Beherrschung der Faktorzerlegung nicht weit...

Dazu ein Beispiel:

Man bestimme das kgV von $3a - 9b$, $4a - 12b$ und 12 .

Faktorzerlegungen:

$$3a - 9b = 3(a - 3b)$$

$$4a - 12b = 4(a - 3b)$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

Woraus man das kgV sofort erkennt: $\text{kgV} = 12(a - 3b)$.

19.7 Der grösste gemeinsame Teiler (ggT)

Zu jeder Zahl kann man ihre **Teilermenge** angeben.

Beispiel: Wir betrachten die Zahlen 30 und 12.

$$T_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}, \quad T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Die gemeinsamen Teiler beider Zahlen lauten: 1, 2, 3 und 6

Der **grösste** gemeinsame **Teiler** beider Zahlen ist somit die Zahl **6**:

Man schreibt dafür auch: **ggT(30; 12) = 6**

Bei grösseren Zahlen hilft die Primfaktorenzerlegung weiter:

Ermittlung des ggT mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung:

Beispiel:

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

1. Primfaktorenzerlegung

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(240; 300) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

2. Man bildet das Produkt aus den gemeinsamen Primfaktoren

Der **ggT** zweier oder mehrerer Zahlen ist das **Produkt der gemeinsamen Primfaktoren**.

19.8 Masseinheiten

Länge	Umwandlungszahl 1000
1 km = 1000 m	km : Kilometer
	Umwandlungszahl 10
1 m = 10 dm	m : Meter
1 dm = 10 cm	dm : Dezimeter
1 cm = 10 mm	cm : Zentimeter
1 mm	mm : Millimeter

Beispiele: 450 cm = 45 dm 3 km = 300 000 cm

Flächeninhalt	Umwandlungszahl 100
1 km² = 100 ha	km ² : Quadratkilometer
1 ha = 100 a	ha : Hektar
1 a = 100 m ²	a : Are
1 m² = 100 dm ²	m ² : Quadratmeter
1 dm² = 100 cm ²	dm ² : Quadratdezimeter
1 cm² = 100 mm ²	cm ² : Quadratzentimeter
1 mm²	mm ² : Quadratmillimeter

Beispiele: 120 000 cm² = 12 m² 2 a = 20 000 dm²

Rauminhalt	Umwandlungszahl 1000
1 m³ = 1000 dm ³	m ³ : Kubikmeter
1 dm³ = 1000 cm ³	dm ³ : Kubikdezimeter
1 cm³ = 1000 mm ³	cm ³ : Kubikzentimeter
1 mm³	mm ³ : Kubikmillimeter
1 hl = 100 l	hl : Hektoliter
	Umwandlungszahl 10
1 l = 10 dl = 1 dm³	l : Liter
1 dl = 10 cl	dl : Deziliter
1 cl = 10 ml	cl : Zentiliter
1 ml = 1 cm³	ml : Milliliter

Beispiele: 13 cm³ = 13 000 mm³ 200 dl = 20 dm³