Übungsblatt 3 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Grundlagen der Statistik: Suffizienz

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 10, Abgabe der Lösungen: Woche 12 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 13

Standard

Aufgabe 12 [Faktorisierungskriterium & minimal suffiziente Statistik] [4 Punkte]

Sei $(y_1, \ldots, y_n)$ eine Stichprobe aus einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Faktorisierungskriteriums (Lemma 3.3) eine suffiziente Statistik für λ.

b) Berechnen Sie die minimal suffiziente Statistik in diesem Fall und vergleichen Sie mit a).

Aufgabe 13 [minimal suffiziente Statistik] [3 Punkte]

Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus einer Exp(λ)-Verteilung, $\lambda > 0$. Berechnen Sie die minimal suffiziente Statistik für λ.

Aufgabe 14 [minimal suffiziente Statistik] [4 Punkte]

Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus einer $\Gamma(m, \lambda)$-Verteilung, $\lambda > 0, m \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die minimal suffiziente Statistik für (m, λ), die Sie hier beide als unbekannt ansehen - hingegen kennen Sie natürlich n. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Resultat in Aufgabe 13; beachten Sie, dass Aufgabe 13 ein Spezialfall von Aufgabe 16 ist mit $m = 1$. Dies sollte sich wohl auch im Resultat widerspiegeln! Bemerkung: von der Theorie her ist es nachvollziehbar, dass jemand sagt, bei einer Stichprobe aus Bin(m,p) ist ja schliesslich m auch als bekannt anzunehmen. Es gibt jedoch bei der Gamma-Verteilung Fragestellungen, in denen m wirklich als unbekannter Parameter anzusehen ist.

Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Statistische Methoden"

Olivier Warin

18. März 2011

Aufgabe 12 [Faktorisierungskriterium & minimal suffiziente Statistik]
Sei $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ eine Stichprobe aus einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

a) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion (in analoger Notation wie in der Vorlesung) lautet hier:

$$p(\boldsymbol{y}; \lambda) \overset{\text{II}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} = \underbrace{e^{-n\lambda} \lambda^{n\overline{\boldsymbol{y}}}}_{=:g(\overline{\boldsymbol{y}},\lambda)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i!}}_{=:h(y_1,\ldots,y_n)} .$$

Also ist nach Lemma 3.3 $T(\boldsymbol{y}) := \overline{\boldsymbol{y}}$ eine suffiziente Statistik für λ.

b) Seien $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in K \setminus D_0$, wobei K den Stichprobenraum bezeichnet und $D_0 = \{\boldsymbol{x} | p(\boldsymbol{x}; \lambda) = 0 \,\forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ (wie in der Vorlesung).

Betrachten wir nun den Likelihood-Quotienten:

$$\frac{p(\boldsymbol{y}; \lambda)}{p(\boldsymbol{x}; \lambda)} \overset{\text{a)}}{=} \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{n\overline{\boldsymbol{x}}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}}{e^{-n\lambda} \lambda^{n\overline{\boldsymbol{y}}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i!}} = \lambda^{n(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}})} \prod_{i=1}^{n} \frac{y_i!}{x_i!}.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann unabhänig von λ, wenn $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{y}}$. Also ist nach Satz 3.5

$$T(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}}$$

eine minimal suffiziente Statistik für λ.

Aufgabe 13
Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ eine Stichprobe aus einer Exp(λ)-Verteilung, $\lambda > 0$. Nun wollen wir eine minimal suffiziente Statistik für λ bestimmen. Analog wie in Aufgabe 12 b) betrachten wir dazu den entsprechenden Likelihood-Quotienten ($\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K \setminus D_0$):

$$\frac{f(\boldsymbol{y}; \lambda)}{f(\boldsymbol{x}; \lambda)} \overset{\text{II}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda y_i}}{\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}} = e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = e^{\lambda n (\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}})}.$$

Dieser Ausdruck ist klar genau dann unabhängig von λ wenn $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{y}}$. Somit ist nach Satz 3.5

$$T(x) = \overline{\boldsymbol{x}}$$

eine minimal suffiziente Statistik für λ.

Aufgabe 14
Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ eine Stichprobe aus einer $\Gamma(m, \lambda)$-Verteilung, $\lambda > 0, m \in \mathbb{N}$. Nun suchen wir eine minimal suffiziente Statistik für (m, λ). Wieder betrachten wir dazu den entsprechenden Likelihood-Quotienten ($\boldsymbol{y} = (y_1, .., y_n)$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K \setminus D_0$):

$$\frac{f(\boldsymbol{y}; m, \lambda)}{f(\boldsymbol{x}; m, \lambda)} \overset{\text{II}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i^{m-1} e^{-\lambda y_i} \lambda^m}{\Gamma(m)}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m-1} e^{-\lambda x_i} \lambda^m}{\Gamma(m)}} = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} y_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \right)^{m-1} e^{\lambda n (\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}})}.$$

Dieser Ausdruck ist (für $m > 1$) genau dann unabhängig von (m, λ) wenn $\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{y}}$ und $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i$. Somit ist nach Satz 3.5

$$T(\boldsymbol{x}) = \left(\overline{\boldsymbol{x}}, \prod_{i=1}^{n} x_i \right)$$

eine minimal suffiziente Statistik für (m, λ).