Übungsblatt 6 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Testtheorie: $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ vs $\theta \notin [\theta_1, \theta_2]$, UMPU-Tests, Cox-Hinkley

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 14, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Donnerstag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 17

Must

Aufgabe 24 [diese sieben Bedingungen...]

Zeigen Sie im Fall einer Stichprobe aus $\mathcal{N}(\mu, 1)$, dass die sieben Bedingungen aus Satz 4.12 erfüllt sind.

Standard

Aufgabe 25 [unbiased bei Tests] [2+2 Punkte]

Sei $x_1, ..., x_4$ eine Stichprobe aus einer Be(p)-Verteilung. Wir testen $H_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ mit folgendem Test:

$$d_1(x) = I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 2].$$

a) Ist dieser Test unverfälscht?

b) Gibt es ein $p_0 \in (0, 1)$, sodass der Test

$$d_2(x) = I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \notin \{2, 3\}]$$

unverfälscht ist für $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$?

Aufgabe 26 [mit Hilfe von R/S-PLUS; UMPU bei Symmetrie] [2 Punkte]

Sei $x_1, \ldots, x_{10}$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\theta, 1)$-Verteilung. $\mathcal{H}_0 : \theta \in [1, 2]$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \notin [1, 2]$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.1.

Aufgabe 27 [mit Hilfe von Rechnern; UMPU vs Cox-Hinkley] [2+1+2+1 Punkte]

a) Sei x eine Einerstichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 1$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.1.

b) Lösen Sie a) mit Cox-Hinkley und vergleichen Sie.

c) Sei $x_1, \ldots, x_{10}$ eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. $\mathcal{H}_0 : \theta \in [1, 2]$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \notin [1, 2]$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.05.

d) Lösen Sie c) mit Cox-Hinkley und vergleichen Sie.

Tipp zu c): Beginnen Sie mit dem Intervall $[0, t_2]$ so, dass $E_1[d(\mathbf{X})] = \alpha$ und berechnen Sie dann $E_2[d(\mathbf{X})]$. $E_2[d(\mathbf{X})]$ wird kleiner als α sein. Dann nehmen Sie in kleinen Iterationsschritten (t_1 erhöhen) $[t_1, t_2]$ immer jeweils so, dass $E_1[d(\mathbf{X})] = \alpha$. Man kann zeigen (siehe Vlsg), dass $E_2[d(\mathbf{X})]$ wachsend ist - brechen Sie ab, sobald Sie auch hier α haben.

Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Statistische Methoden"

Olivier Warin

24. April 2011

Aufgabe 24 [diese sieben Bedingungen. . .]
Behauptung: Bei einer $\mathcal{N}(\mu, 1)$-Verteilung sind alle sieben Bedingungen von Satz 4.12 erfüllt.

Beweis: Eine minimal suffiziente Statistik für μ lautet bekanntlich $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$.
Nun zu den sieben Bedingungen:

1. Da die Entscheidungsfunktion d die Form $d(\boldsymbol{x}) = 1 \Leftrightarrow t \notin [t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ hat, ist diese Entscheidungsfunktion klar messbar. Denn dies ist nichts anderes als eine Indikatorfunktion einer Borel-messbaren Menge (nämlich $\mathbb{R} \setminus [t_1, t_2]$), welche bekanntlich messbar ist.

2. MLQ ist erfüllt, da $\mathcal{N}(\mu, 1)$ zur exponentiellen Familie gehört. Alternativ berechnen wir hier direkt (mit den Notationen aus der Vorlesung):

$$g_{\mu_0\mu_1}(t(\boldsymbol{x})) = \frac{f_{\mu_1}(\boldsymbol{x})}{f_{\mu_0}(\boldsymbol{x})} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu_1)^2}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu_0)^2}} = e^{(\mu_1-\mu_0)t(\boldsymbol{x})+n/2(\mu_0^2-\mu_1^2)}.$$

   Dies ist für $\mu_1 > \mu_0$ klar in $t(\boldsymbol{x})$ streng monoton wachsend, also ist die MLQ-Eigenschaft erfüllt.

3. Sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Weiter definiere $N(\mu_0) := \{\mu \in \mathbb{R} | \, |\mu - \mu_0| < 1\}$. Nun gilt für alle $\mu \in N(\mu_0)$:

$$\begin{aligned} g_{\mu_0\mu}(t_1) + g_{\mu\mu_0}(t_2) = e^{(\mu-\mu_0)t_1+n/2(\mu_0^2-\mu^2)} + e^{(\mu_0-\mu)t_2+n/2(\mu^2-\mu_0^2)} &\leqslant 2e^{|\mu-\mu_0|t_2+n/2|\mu^2-\mu_0^2|} \\ \leqslant 2e^{t_2+n/2|\mu-\mu_0||\mu+\mu_0|} \leqslant 2e^{t_2+\frac{n}{2}|\mu+\mu_0|} &\leqslant e^{t_2+n|\mu_0|} < \infty. \end{aligned}$$

   Damit ist gezeigt, dass die dritte Bedingung aus der Vorlesung erfüllt ist.

4. Die Dichtefunktion $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$ ist klar stetig in μ.

5. Der Ausdruck

$$g_{\mu\mu'}(t) = e^{(\mu'-\mu)t+n/2(\mu^2-\mu'^2)}$$

   ist offenbar stetig in μ.

6. Die minimal suffiziente Statistik T hat hier eine $\mathcal{N}(n\mu, n)$-Verteilung. Damit ist die Dichtefunktion davon klar niemals Null.

7. Für alle $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$ mit $\mu \neq \mu'$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\mu\mu'}(t)}{dt} &= (\mu' - \mu)e^{(\mu'-\mu)t+n/2(\mu^2-\mu'^2)} \\ \frac{d^2g_{\mu\mu'}(t)}{dt^2} &= (\mu' - \mu)^2 e^{(\mu'-\mu)t+n/2(\mu^2-\mu'^2)} > 0. \end{aligned}$$

   Also ist $\frac{dg_{\mu\mu'}(t)}{dt}$ streng monoton wachsend in t.

■

Aufgabe 25 [unbiased bei Tests]
Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_4)$ eine Stichprobe aus einer Be(p)-Verteilung.

a) Wir testen $\mathcal{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $\mathcal{H}_1 : p \neq \frac{1}{2}$ mit folgendem Test:

$$d_1(\boldsymbol{x}) = I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 2].$$

Behauptung: Dieser Test ist unverfälscht.

Beweis: Nach Definition 4.11 müssen wir zeigen, dass Machtfunktion $\pi : p \in [0,1] \mapsto E_p[d_1(\boldsymbol{X})]$ an der Stelle $p = \frac{1}{2}$ (also in $\mathcal{H}_0$) minimal ist. Dazu berechnen wir erst diese Machtfuktion:

$$\begin{aligned}\pi(p) = E_p[d_1(\boldsymbol{X})] \;&=\; P_p[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \neq 2] \;=\; 1 - P[\mathrm{Bin}(4,p) = 2]\\ = 1 - \binom{4}{2} p^2(1-p)^{4-2} \;&=\; 1 - 6p^2(1-p)^2.\end{aligned}$$

Nun leiten wir diese Funktion ab und erhalten so

$$\pi'(p) = -12p(1-p)^2 + 12p^2(1-p) \;=\; -12p(p-1)(2p-1).$$

Die Nullstellen davon sind $0, \frac{1}{2}$ und 1. Da π stetig und $[0,1]$ kompakt ist, muss π auf $[0,1]$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum annehmen. Da weiter $\pi(\frac{1}{2}) < \pi(0) = \pi(1)$, folgt daraus dass π das Minimum an der Stelle $\frac{1}{2}$ annimmt.

Wir schliessen: Für alle $p \in \mathcal{H}_1$ (also $p \neq \frac{1}{2}$) gilt:

$$\pi(p) \geqslant \pi(1/2) \;=\; \sup_{\theta \in \mathcal{H}_0} \pi(\theta) \;=\; \alpha,$$

wobei α die Grösse des Tests bezeichnet. Nach Definition 4.11 ist die Behauptung damit gezeigt.

■

b) **Behauptung:** Es gibt ein $p_0 \in (0,1)$, so dass der Test

$$d_2(\boldsymbol{x}) \;=\; I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \notin \{2,3\}]$$

für die Hypothesen $\mathcal{H}_0 : p = p_0$ gegen $\mathcal{H}_1 : p \neq p_0$ unverfälscht ist.

Beweis: Wir bestimmen wie in a) zuerst die Machtfunktion π:

$$\begin{aligned}\pi(p) &= E_p[d_2(\boldsymbol{X})] \;=\; P[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \notin \{2,3\}] \;=\; 1 - P[\mathrm{Bin}(4,p) = 2] - P[\mathrm{Bin}(4,p) = 3]\\ &= 1 - \binom{4}{2} p^2(1-p)^{4-2} - \binom{4}{3} p^3(1-p)^{4-3}\\ &= 1 - 6p^2(1-p)^2 - 4p^3(1-p).\end{aligned}$$

Da π stetig und $[0,1]$ kompakt, nimmt π sicher an einer Stelle p_0 ein Minimum an. Da weiter $\pi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} < 1 = \pi(0) = \pi(1)$ wird dieses Minimum sicher nicht am Rand des Intervalls angenommen. Wir schliessen $p_0 \in (0,1)$.

Da $\pi(p_0)$ minimal ist, folgt für alle $p \in \mathcal{H}_1$:

$$\pi(p) \geqslant \pi(p_0).$$

Dies bedeutet, dass der Test d_2 für dieses p_0 unverfälscht ist.

■

Bemerkung: Man kann dieses p_0 natürlich konkret bestimmen und erhält dann

$$p_0 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 26 [mit Hilfe von R/S-PLUS; UMPU bei Symmetrie]
Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots x_{10})$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\theta, 1)$-Verteilung. Wir suchen nun einen UMPU-Test nach Satz 4.12 zum Niveau $\alpha = 0.1$ für die Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \theta \in [1, 2] \quad \text{vs.} \quad \mathcal{H}_1 : \theta \notin [1, 2].$$

Setze $n = 10$, $\theta_1 = 1$ und $\theta_2 = 2$.

Nach Vorlesung ist $t(\boldsymbol{x}) = x_1 + \cdots + x_n$ eine minimal suffiziente Statistik für θ. Laut Satz 4.12 hat der gesuchte UMPU-Test die folgende Form:

$$d(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \notin [t_1, t_2] \\ \in [t_1, t_2] \end{pmatrix},$$

wobei $t_1 < t_2$ zwei reelle Zahlen, mit $E_{\theta_1}[d(t(\boldsymbol{X}))] = E_{\theta_2}[d(t(\boldsymbol{X}))] = \alpha$, sind. Wir erhalten also das folgende Gleichungssystem (beachte dass $t(\boldsymbol{X})$ eine $\mathcal{N}(n\theta, n)$-Verteilung hat):

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = 1 - E_{\theta_1}[d(t(\boldsymbol{X}))] &= P[\mathcal{N}(n\theta_1, n) \in [t_1, t_2]] \\ 1 - \alpha = 1 - E_{\theta_2}[d(t(\boldsymbol{X}))] &= P[\mathcal{N}(n\theta_2, n) \in [t_1, t_2]]. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt hier klar $t_1 = \frac{n\theta_1 + n\theta_2}{2} - \tau$ und $t_2 = \frac{n\theta_1 + n\theta_2}{2} + \tau$ für ein gewisses $\tau \in \mathbb{R}$. Somit reicht es, wenn wir

$$\underbrace{P[\mathcal{N}(n\theta_1, n) \in [t_1, t_2]]}_{=:\psi(\tau)} = 1 - \alpha.$$

als Gleichung für τ lösen. Wir tun dies nun mit einem Intervallverschachtelungsverfahren:

```
psi <- function(n,theta1,theta2,tau) {
      nmtheta <- n*mean(c(theta1,theta2));
      #nmtheta=n/2(theta1+theta2);
      t1 <- nmtheta - tau;
      t2 <- nmtheta + tau;
      return(pnorm(t2,n*theta1,sqrt(n))-pnorm(t1,n*theta1,sqrt(n)));
}

taucalc <- function(alpha,n,theta1,theta2,taumin=0,taumax=100,
                  tol=1e-9){
      tau <- mean(c(taumin,taumax));
      psitry <- psi(n,theta1,theta2,tau);
      if (abs(psitry - (1-alpha)) < tol) {
            return(tau)
      }
      if (psitry > 1- alpha) {
            return(taucalc(alpha,n,theta1,theta2,taumin,tau));
      }
      else {
            return(taucalc(alpha,n,theta1,theta2,tau,taumax));
      }
}

aufg26 <- function(alpha=0.1,n=10,theta1=1,theta2=2){
      tau <- taucalc(alpha,n,theta1,theta2);
      nmtheta <- n*mean(c(theta1,theta2));
      return(c(nmtheta - tau, nmtheta+tau))
}
```

Dieses kleine R-Programm liefert

$$(t_1, t_2) \underset{\text{R}}{\doteq} \texttt{aufg26()} \underset{\text{R}}{\doteq} (5.947299, 24.052701),$$

also haben wir mit $t_1 \doteq 5.947299$ und $t_2 \doteq 24.052701$ den gesuchten UMPU-Test gefunden.

Aufgabe 27 [mit Hilfe von Rechnern; UMPU vs Cox-Hinkley]

a) Sei x eine Einerstichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. Nun suchen wir einen UMPU-Test nach Satz 4.12 für $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 1$. Setze $\theta_0 = 1$.

Offenbar ist hier $t(x) = x$ eine minimal suffiziente Statistik. Nach Satz 4.12 hat der gesuchte Test d die Form

$$d(t) \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow t(x)\begin{pmatrix}\notin [t_1, t_2]\\ \in [t_1, t_2]\end{pmatrix},$$

wobei $t_1 < t_2$ zwei reelle Zahlen sind, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[d(X)] &= \alpha \\ \frac{d}{d\theta} E_\theta[d(X)]\Big|_{\theta=\theta_0} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Durch Einsetzen der Definitionen erhalten wir so das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + e^{-\theta_0 t_2} - e^{-\theta_0 t_1} &= \alpha \\ t_1 e^{-\theta_0 t_1} - t_2 e^{-\theta_0 t_2} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses nicht-lineare Gleichungssystem lösen wir nun numerisch mit dem Newton-Verfahren. Dazu schreiben wir es in der Form $\quad (\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)^t)$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) = 0,$$

wobei $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 - \alpha + e^{-\theta_0 t_2} - e^{-\theta_0 t_1} \\ t_1 e^{-\theta_0 t_1} - t_2 e^{-\theta_0 t_2} \end{pmatrix}.$$

Das Newton-Verfahren funktioniert nun wie folgt: Wir geben einen Startwert $\boldsymbol{t}_0$ vor und berechnen dann iterativ für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\boldsymbol{t}_{n+1} = \boldsymbol{t}_n - (d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n))^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n),$$

wobei $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n)$ die Jacobi-Matrix von $\boldsymbol{F}$ an der Stelle $\boldsymbol{t}_n$ bezeichnet. Es gilt also

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \theta_0 e^{-\theta_0 t_1} & -\theta_0 e^{-\theta_0 t_2} \\ (1 - \theta_0 t_1) e^{-\theta_0 t_1} & (\theta_0 t_2 - 1) e^{-\theta_0 t_2}. \end{pmatrix}$$

Natürlich berechnen wir den Ausdruck $\boldsymbol{x}_n = (d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n))^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n)$ durch lösen des lineares Gleichungssystems

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{x}_n \;=\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_n)$$

und nicht durch explizites berechnen der entsprechenden inversen Matrix (siehe Numerik). Als Startwert verwenden wir $(0, 1)^t$.

Wir brechen das Verfahren ab wenn der Fehler kleiner als eine gewisse Toleranz (`tol`) ist.

```
F <- function(t,alpha,theta0){
      return(c(1-alpha+exp(-theta0*t[2])-exp(-theta0*t[1]),
            t[1]*exp(-theta0*t[1])-t[2]*exp(-theta0*t[2])));
}
dF <- function(t,theta0){
      return(matrix(c(theta0*exp(-theta0*t[1]),
            (1-theta0*t[1])*exp(-theta0*t[1]),
            -theta0*exp(-theta0*t[2]),
            (theta0*t[2]-1)*exp(-theta0*t[2])
      ),2,2));

}
```

```
aufg27a <- function(alpha=0.1,t=c(0,1),theta0=1,tol=1e-9) {
     Ftry  <- F(t,alpha,theta0)
     while (max(abs(Ftry)) > tol) {
          t <- t - solve(dF(t,theta0),Ftry)
          Ftry  <- F(t, alpha,theta0)
     }
     return(t);
}
```

Dieses kleine R-Programm liefert nun

$$(t_1, t_2) \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{aufg27a()} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} (0.08381479, 3.93214595).$$

Damit haben wir den gesuchten UMPU-Test gefunden.

b) Wir lösen nun nochmals die Teilaufgabe a). Dieses mal gehen wir aber nicht genau nach Satz 4.12 vor, sondern benutzen Cox-Hinkley. In (fast) denselben Notationen wie in a) müssen wir also ein $\tilde{t}_1$ und ein $\tilde{t}_2$ in $\mathbb{R}$ finden, so dass

$$P_{\theta_0}[X \leqslant \tilde{t}_1] = \alpha/2$$
$$P_{\theta_0}[X \geqslant \tilde{t}_2] = \alpha/2$$

gilt. R liefert hier sofort

$$\tilde{t}_1 \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{qexp(0.1/2,1)} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} 0.05129329$$
$$\tilde{t}_2 \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{qexp(0.1/2,1,lower.tail=FALSE)} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} 2.995732.$$

Cox-Hinkley und UMPU liefern verschiedene Loesungen. Kein Annahmebereich von $\mathcal{H}_0$ des einen ist im Annahmebereich von $\mathcal{H}_0$ des anderen enthalten.

c) Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{10})$ eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. Jetzt suchen wir einen UMPU-Test nach Satz 4.12 zum Niveau $\alpha := 0.05$ für $\mathcal{H}_0$: $\theta \in [1, 2]$ vs $\theta \notin [1, 2]$.

Setze $n = 10$, $\theta_1 = 1$ und $\theta_2 = 2$. Bekanntlich ist $t(\boldsymbol{x}) = x_1 + \cdots + x_{10}$ eine minimal suffiziente Statistik für θ.

Nach Satz 4.12 hat der UMPU-Test d die folgende Form

$$d(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \notin [t_1, t_2] \\ \in [t_1, t_2] \end{pmatrix},$$

wobei $t_1 < t_2$ zwei reelle Zahlen sind mit

$$1 - \alpha = 1 - E_{\theta_1}[d(\boldsymbol{X})] = P[\Gamma(n, \theta_1) \in [t_1, t_2]]$$
$$1 - \alpha = 1 - E_{\theta_2}[d(\boldsymbol{X})] = P[\Gamma(n, \theta_2) \in [t_1, t_2]].$$

Beachte, dass $t(\boldsymbol{X})$ eine $\Gamma(n, \theta)$-Verteilung hat.

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit einem Intervallschachtelungsverfahren für t_1:

```
psi <- function(n,theta2,t1,t2) {
     return(pgamma(t2,n,theta2)
          -pgamma(t1,n,theta2));
}
aufg27c <- function(alpha=0.05,n=10,theta1=1,
     theta2=2,t1min=0,t1max=100,tol=1e-9) {
     t1 <- mean(c(t1min,t1max));
     p <- pgamma(t1,n,theta1)
     #Falls p > alpha ist t1 klar zu gross:
     if (p>alpha) return(
          aufg27c(alpha,n,theta1,theta2,
```

```
                    t1min,t1max/2,tol)
        );
        t2 <- qgamma(p+1-alpha,n,theta1)
        psitry <- psi(n,theta2,t1,t2)
        if (abs(psitry - (1-alpha)) < tol) {
         return(c(t1,t2))
        }
        if (psitry<1- alpha) {return(
              aufg27c(alpha,n,theta1,theta2,
                    t1min,t1,tol)
        );}
        else return(
              aufg27c(alpha,n,theta1,theta2,
                    t1,t1max,tol)
        );
}
```

Dieses kleine R-Programm liefert nun

$$(t_1, t_2) \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{aufg27c()} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} (2.712678, 15.726777).$$

Damit haben wir den gesuchten UMPU-Test gefunden.

d) Jetzt lösen wir nochmals c) mit Cox-Hinkley. In (fast) denselben Notationen wie in c) suchen wir hier zwei reelle Zahlen $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$, so dass gilt:

$$P_{\theta_1}[t(\boldsymbol{X}) \leqslant \tilde{t}_2] = \frac{\alpha}{2}$$
$$P_{\theta_2}[t(\boldsymbol{X}) \geqslant \tilde{t}_1] = \frac{\alpha}{2}.$$

(Beachte, dass wir hier MLQ mit “monoton fallend” statt “monoton steigend” haben!)

R liefert sofort

$$\tilde{t}_1 \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{qgamma(0.05/2,10,2)} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} 2.397694$$
$$\tilde{t}_2 \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{qgamma(0.05/2,10,1,lower.tail=FALSE)} \underset{\mathrm{R}}{\doteq} 17.08480.$$

In dieser Teilaufgabe haben wir das “häufige” Resultat, dass beim UMPU das Inverall des Annahmebereich von $\mathcal{H}_0$ Teilmenge des entsprechenden Intervalles bei Cox-Hinkley ist. Der anschauliche Grund für dieses Phänomen wurde graphisch in der Vorlesung gezeigt: Cox-Hinkley nimmt sicherheitshalber je ein halbes α an den Grenzen. “Meist” waere so 0.8α auch noch gut gegangen, aber ohne genaue Untersuchung der Steigung der Machtfunktionen kann man das nicht wissen. UMPU nützt dafür alles voll aus.