Übungsblatt 7 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Testtheorie: Was wir durch Invarianz gewonnen haben: t-, F- und χ^2-Test ($V[X] = \sigma_0^2$?)

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 18

In der Vorlesung haben wir in 4.4 die Invarianz auf zweiseitige Testprobleme angewandt. Die Teststatistiken können aber auch für einseitige Tests benutzt werden und nachfolgende Aufgaben sind denn auch zum Teil so zu lösen.

Must

Aufgabe 28

X habe eine $F_{4,n}$-Verteilung. Leider kennen Sie das n nicht. Sie wissen aber, dass $P[X \geq 3.06] = 0.05$. Finden Sie n.

Aufgabe 29

X habe eine $F_{m,n}$-Verteilung. Sie möchten a finden, sodass $P[X \leq a] = 0.05$. Leider haben Sie nur eine F-Tabelle dabei, wo die kritischen Werte für $P[X \leq a] = 0.95$ eingetragen sind. Wie können Sie Ihr Problem trotzdem lösen? Tip: Schauen Sie, wie die F-Verteilung definiert ist.

Standard

Aufgabe 30 [Ist die Varianz $\leq \sigma_0^2$?] [4 Punkte]

Generieren Sie in R fünf mal je eine Stichprobe vom Umfang 50 aus einer Normalverteilung (Erwartungswert ist Ihre PN (= **P**ersonal **N**umber)). Als Varianz wählen Sie 1.1, vergessen aber sofort wieder, dass die Varianz 1.1 ist. Testen Sie jetzt in allen fünf Fällen auf dem 10 % - Niveau, ob die Varianz ≤ 1 ist ($\mathcal{H}_0 : \sigma^2 \leq 1$). Bei den meisten StudentInnen wird man nicht bei allen fünf Stichproben zum selben Schluss gelangen. Vorsicht: durch was teilt der Befehl "var" in R, wie gibt man in R die Varianz bei der Normalverteilung ein?

Aufgabe 31 [Erwartungswert gleich μ_0 bei unbekannter Varianz?] [4 Punkte]

a) Generieren Sie in R eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_{100}$ aus einer Normalverteilung mit Erwartungswert PN. Als Varianz wählen Sie 35, vergessen aber sofort wieder, dass die Varianz 35 ist. Testen Sie jetzt auf dem 10 % - Niveau, ob der Erwartungswert dieser Stichprobe gleich $(PN - 1)$ ist ($\mathcal{H}_0 : \mu = \text{PN} - 1, \mathcal{H}_1 : \mu \neq \text{PN} - 1$). Kontrollieren Sie "von Hand", ob die eingebaute Funktion in R genau das macht, was wir in der Vorlesung hergeleitet haben.

b) Generieren Sie in R eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_{100}$ aus einer Normalverteilung mit Erwartungswert PN. Als Varianz wählen Sie 0.25, vergessen aber sofort wieder, dass die Varianz 0.25 ist. Testen Sie jetzt auf dem 10 % - Niveau, ob der Erwartungswert dieser Stichprobe gleich $(PN - 1)$ ist ($\mathcal{H}_0 : \mu = \text{PN} - 1, \mathcal{H}_1 : \mu \neq \text{PN} - 1$).

<u>Aufgabe 32 [Sind die Varianzen von 2 unabhängigen Stichproben gleich?]</u> [4 Punkte]

Generieren Sie in R eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_{200}$ aus einer Normalverteilung (Erwartungswert Ihre PN). Als Varianz wählen Sie 1, vergessen aber sofort wieder, dass die Varianz 1 ist. Generieren Sie danach in R 3 Stichproben vom Umfang 100, 1'000 und 10'000 aus einer Normalverteilung (Erwartungswert Ihre PN). Als Varianz wählen Sie jetzt 1.1, vergessen aber sofort wieder, dass die Varianz 1.1 ist. Testen Sie jetzt in allen drei Fällen auf dem 10 % - Niveau, ob die Varianzen der 100, 1'000 und 10'000-er Stichprobe gleich der Varianz in der 200-er Stichprobe ist ($\mathcal{H}_0$: Varianz gleich; $\mathcal{H}_1$: Varianz verschieden). Kontrollieren Sie in einem der drei Fälle auch "von Hand", ob die eingebaute Funktion in R genau das macht, was wir in der Vorlesung hergeleitet haben.

Übungsblatt 7 zur Vorlesung “Statistische Methoden”

Olivier Warin

27. April 2011

Aufgabe 28

X habe eine $F_{4,n}$-Verteilung. Weiter wissen wir, dass $P[X \geqslant 3.06] \doteq 0.05$.

Wir schliessen $P[X \leqslant 3.06] \doteq 0.95$. Eine Tabelle des unteren 95%-Quantil der $F_{4,n}$-Verteilung (siehe z.B. Krengel) liefert $n = 15$.

Aufgabe 29

X habe eine $F_{m,n}$-Verteilung. Wir möchten nun eine reelle Zahl a finden, so dass $P[X \leqslant a] = 0.05$. Leider haben wir nur eine F-Tabelle dabei, wo die kritischen Werte für $P[X \leqslant a] = 0.95$ eingetragen sind.

Um dieses Problem zu lösen schauen wir uns die formelle Definition an:

$$F_{m,n} = \frac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n}.$$

Wir schliessen

$$F_{m,n} = \frac{1}{F_{n,m}}$$

und damit

$$P[X \leqslant a] = P\left[\frac{1}{F_{n,m}} \leqslant a\right] = P\left[\frac{1}{a} \leqslant F_{n,m}\right] = 1 - P\left[F_{n,m} \leqslant \frac{1}{a}\right].$$

Wenn wir nun $\frac{1}{a}$ durch die Gleichung $P[F_{n,m} \leqslant \frac{1}{a}] = 1 - 0.05 = 0.95$ bestimmen, haben wir damit das gesuchte a gefunden.

Aufgabe 30 [Ist die Varianz $\leqslant \sigma_0^2$?]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Zufallsgrössen mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sei weiter $\sigma_0 = 1$. Wir wollen nun die zwei Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2,\ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

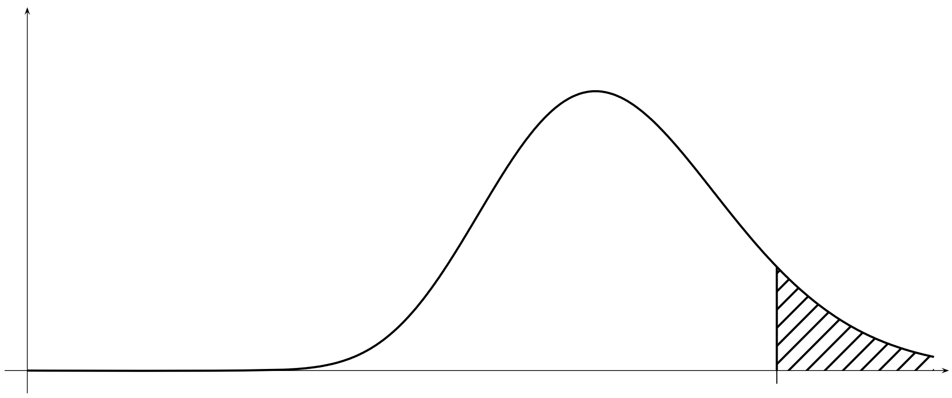
gegeneinander testen.

Wenn $\sigma^2 = \sigma_0^2$ hat der Ausdruck

$$T := \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

eine χ^2_{n-1}-Verteilung. Wir benutzen nun, wie in 4.4.2, dieses T als Teststatistik.

Den Ablehnungsbereich wählen wir dabei, wie in der folgenden Skizze (des Graphen der Dichte von T wenn $\sigma^2 = \sigma_0^2$) angedeutet (hier mit $n = 50$):



Damit unser Test das Niveau 10% =: α hat, müssen wir dabei K so wählen, dass die schraffierte Fläche den Flächeninhalt α hat.

```
> mytest <- function(x,sigma02=1,alpha=0.1){
+  n <- length(x) #Umfang der Stichprobe
+  K <- qchisq(1- alpha,n-1)
+  t <- (1/sigma02)* (n-1)*var(x) #Wert der Teststatistik
+  if (t > K) {
+   cat('Wir nehmen H_1 an, d.h. sigma^2>',sigma02,
+     ', da t =',t,'> K =', K,'\n')
+  }
+  else {
+   cat('Wir nehmen H_0 an, d.h. sigma^2<=',sigma02,
+     ', da t =',t,'<= K =', K,'\n')
+   }
+ }
>
> PN <- 2
> for (i in c(1:5)) { #Wiederhole das Folgende fuenfmal.
+  mytest(rnorm(50,PN,sqrt(1.1)))
+ }
Wir nehmen H_1 an, d.h. sigma^2> 1 , da t = 63.44125 > K = 62.03754
Wir nehmen H_0 an, d.h. sigma^2<= 1 , da t = 25.25626 <= K = 62.03754
Wir nehmen H_0 an, d.h. sigma^2<= 1 , da t = 37.23737 <= K = 62.03754
Wir nehmen H_0 an, d.h. sigma^2<= 1 , da t = 53.7727 <= K = 62.03754
Wir nehmen H_0 an, d.h. sigma^2<= 1 , da t = 52.52864 <= K = 62.03754
>
```

Aufgabe 31 [Erwartungswert gleich μ_0 bei unbekannter Varianz?]
Sei $n = 100$ und seien weiter $X_1, \ldots, X_n$ iid Zufallsgrössen mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu = \mathrm{PN}$. Setze $\mu_0 = \mathrm{PN} - 1$. Wir wollen nun die zwei Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0, \ \mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$$

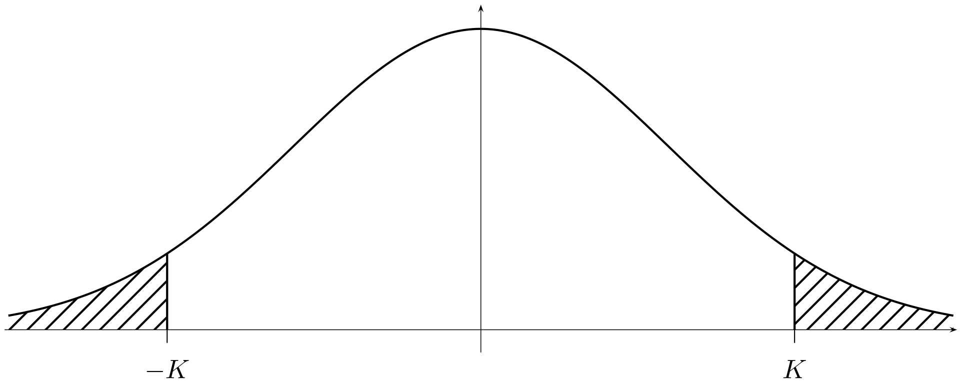
gegeneinander testen.

Unter $\mathcal{H}_0$ hat der Ausdruck

$$T := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}}$$

eine t_{n-1}-Verteilung. Wir benutzen nun, wie in 4.4.3, dieses T als Teststatistik.

Den Ablehnungsbereich wählen wir dabei wie in der folgenden Skizze (des Graphen der Dichte von T unter $\mathcal{H}_0$) angedeutet:



Damit unser Test das Niveau 10% =: α hat, müssen wir dabei K so wählen, dass der Flächeninhalt der schraffierten Fläche genau α beträgt. Wir wählen dazu (nach Cox-Hinkley) K so, dass die rechte (und die linke) schraffierte Fläche den Flächeninhalt $\alpha/2$ hat.

```
> myhandtest <- function(x,mu0,alpha=0.1) {
+  n <- length(x) #Umfang der Stichprobe

+  t <- (mean(x)-mu0)/sqrt(var(x)/n) #Wert der Teststatistik
+  K <- qt(1-alpha/2,n-1)
+  temp <- pt(t,n-1)
+  pvalue <- 2*min(temp,(1-temp)) #Cox-Hinkley -> ''2-mal''
+  cat("''Von Hand'':\n--------------------\n");
+  if (abs(t) > K) {
+   cat("Nehme H_1 an, d.h. Erwartungswert nicht gleich",mu0,"\n")
+  }
+  else {
+   cat("Nehme H_0 an, d.h. Erwartungswert gleich",mu0,"\n")
+  }
+  cat("(K = ",K,", t =",t,"P-Wert =",pvalue,")\n")
+ }
>
> myRtest <- function(x,mu0,alpha=0.1) {
+  T <- t.test(x,mu=mu0, altiernative="two.sided")
+  cat("''Direkt mit R'':\n--------------------\n");
+  print(T);
+  pvalue <- T[[3]] #P-Wert
+  if (pvalue < alpha) {
+   cat("Nehme H_1 an, d.h. Erwartungswert nicht gleich",mu0,"\n")
+  }
+  else {
+   cat("Nehme H_0 an, d.h. Erwartungswert gleich",mu0,"\n")
+  }
+  t <- T[[1]] #Wert der TeststatistiK
+  cat("(t =",t,", P-Wert =",pvalue,")\n")
+ }
>
> #Teilaufgabe a)
> PN <- 2
> x <- rnorm(100,PN,sqrt(35))
> myRtest(x,PN-1)
''Direkt mit R'':
--------------------


     One Sample t-test

```

```
data:  x
t = 0.7041, df = 99, p-value = 0.4831
alternative hypothesis: true mean is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.2071026 2.6650447
sample estimates:
mean of x
 1.436074

Nehme H_0 an, d.h. Erwartungswert gleich 1
(t = 0.7040562  , P-Wert = 0.4830505 )
> myhandtest(x,PN-1)
''Von Hand'':
------------------
Nehme H_0 an, d.h. Erwartungswert gleich 1
(K =  1.660391  , t = 0.7040562 P-Wert = 0.4830505 )
>
> #Teilaufgabe b)
> PN <- 2
> x <- rnorm(100,PN,sqrt(0.25))
> myRtest(x,PN-1)
''Direkt mit R'':
------------------


     One Sample t-test

data:  x
t = 21.6635, df = 99, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 1.953645 2.145953
sample estimates:
mean of x
 2.049799

Nehme H_1 an, d.h. Erwartungswert nicht gleich 1
(t = 21.66348  , P-Wert = 2.375676e-39 )
>
```

In obigen beiden Teilaufgaben a) und b) haben wir eigentlich je wider besseres Wissen auf ein $\mathcal{H}_0$ getestet, welches um 1 kleiner war als das wahre $\mathcal{H}_0$. Weil in a) die Varianz sehr gross ist, merkt das der Test üblicherweise nicht, in b) ist die Varianz hingegen sehr klein, sodass der Test es eher merkt.

Aufgabe 32 [Sind die Varianzen von 2 unabhängigen Stichproben gleich?]
Seien $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsgrössen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ (für alle i, j). Wir wollen nun die zwei Hypothesen

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2,\ \mathcal{H}_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y$$

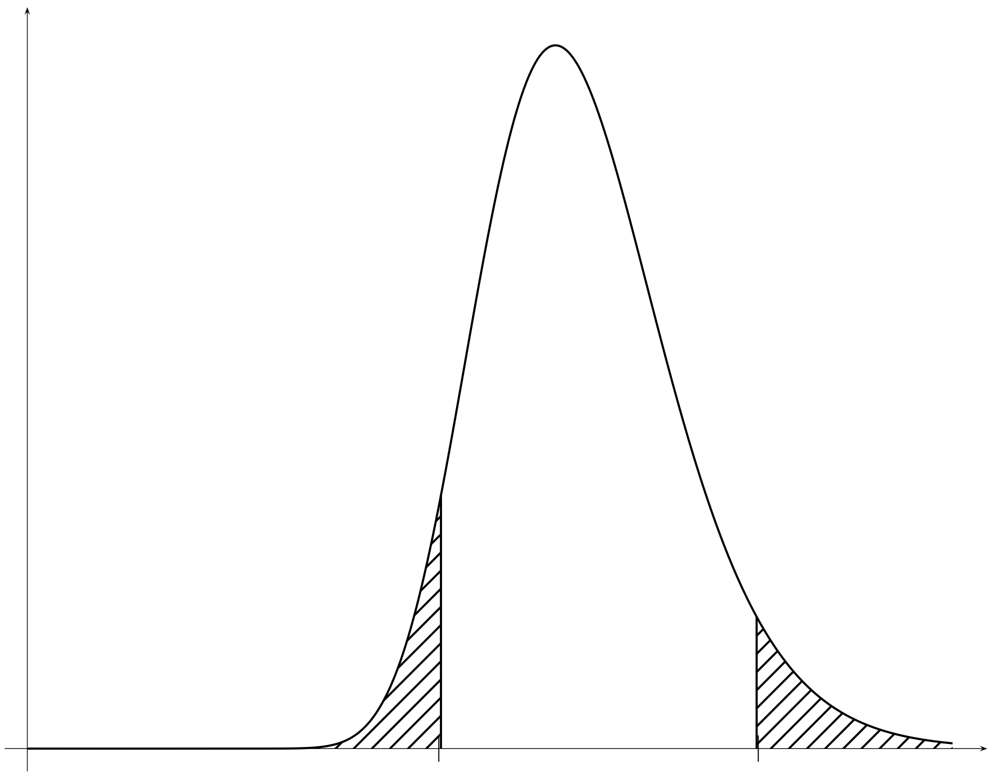
gegeneinander testen.

Unter $\mathcal{H}_0$ hat der Ausdruck

$$T := \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

eine $F_{m-1,n-1}$-Verteilung. Wir benutzen nun, wie in 4.4.4, dieses T als Teststatistik.

Den Ablehnungsbereich wählen wir dabei wie in der folgenden Skizze (des Graphen der Dichte von T) angedeutet (hier mit $m = 200$ und $n = 100$):



Wir wählen dazu K_1 und K_2 (nach Cox-Hinkley) so, dass die linke und die rechte schraffierte Fläche jeweils einen Flächeninhalt von $^{\alpha}/_{2}$ hat.

```
> myhandtest <- function(x,y,alpha=0.1) {
+  m <- length(x) #Umfang der Stichprobe x
+  n <- length(y) #Umfang der Stichprobe y
+  t <- var(x)/var(y) #Wert der Teststatistik
+  K1 <- qf(alpha/2,m-1,n-1)
+  K2 <- qf(alpha/2,m-1,n-1,lower.tail=FALSE)
+  temp <- pf(t,m-1,n-1)
+  pvalue <- 2*min(temp,(1-temp)) #Cox-Hinkley -> ''2-mal''
+  cat("''Von Hand'':\n--------------------\n");
+  if (t < K1 || t > K2) { #t < K1 oder t > K2
+   cat("Nehme H_1 an, d.h. Varianzen nicht gleich\n")
+  }
+  else {
+   cat("Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich\n")
+  }
+  cat("(K1 = ",K1,", K2=", K2, ", t =",t,"P-Wert =",pvalue,")\n")
+ }
>
> myRtest <- function(x,y,alpha=0.1) {
+  T <- var.test(x,y,altiernative="two.sided")
+  cat("''Direkt mit R'':\n--------------------\n");
+  print(T);
+  pvalue <- T[[3]] #P-Wert
+  if (pvalue < alpha) {
+   cat("Nehme H_1 an, d.h. Varianzen nicht gleich\n")
+  }
+  else {
+   cat("Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich\n")
```

```
+   }
+   t <- T[[1]] #Wert der TeststatistiK
+   cat("(t =",t,", P-Wert =",pvalue,")\n")+ }
>
> #Teilaufgabe a)
> PN <- 2
> x <- rnorm(200,PN,1)
> y1 <- rnorm(100,PN,sqrt(1.1))
> y2 <- rnorm(1000,PN,sqrt(1.1))
> y3 <- rnorm(10000,PN,sqrt(1.1))
> myRtest(x,y1)
''Direkt mit R'':
_________________


     F test to compare two variances

data:  x and y
F = 1.0817, num df = 199, denom df = 99, p-value = 0.6676
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.7604281 1.5085010
sample estimates:
ratio of variances
          1.081748

Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich
(t = 1.081748 , P-Wert = 0.6675767 )
> myhandtest(x,y1)
''Von Hand'':
__________________

Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich
(K1 = 0.7563848 , K2= 1.343435 , t = 1.081748 P-Wert = 0.6675767 )
> myRtest(x,y2)
''Direkt mit R'':
_________________


     F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.949, num df = 199, denom df = 999, p-value = 0.653
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.7709169 1.1866629
sample estimates:
ratio of variances
         0.9489746

Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich
(t = 0.9489746 , P-Wert = 0.6530213 )
> myRtest(x,y3)
''Direkt mit R'':
_________________


     F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.9408, num df = 199, denom df = 9999, p-value = 0.5725
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
```

```
95 percent confidence interval:
0.7785362 1.1589293sample estimates:
ratio of variances
         0.9407904

Nehme H_0 an, d.h. Varianzen gleich
(t = 0.9407904 , P-Wert = 0.5724904 )
>
```

Bemerkung: Es fällt auf, dass wir bei allen drei Stichproben einen Fehler 2. Art gemacht haben. Dies kommt dadurch zustande, dass der Umfang der Stichproben zu klein ist, um die kleine Differenz $1.1 - 1 = 0.1$ der Varianzen zu bemerken. Tendenziell sollte der Unterschied eher bemerkt werden, je grösser die Stichproben, wie sah es bei Ihnen aus?