Übungsblatt 8 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Testtheorie: Miscellanea

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 17, Abgabe der Lösungen: Woche 18 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 19

Must

Aufgabe 33 [Asymptotische Verfahren]

Sie geraten zusammen mit einem Kollegen in eine Räuberhöhle. Man fordert Sie dort zu einem Münzwurfspiel auf: eine Münze wird 100 mal geworfen; bei Kopf erhalten Sie von den Gaunern einen Franken, bei Zahl erhalten die Gauner von Ihnen einen Franken. Sie wollen die Gauner nicht vor den Kopf stossen und nur bei ganz extrem zu Ihren Ungunsten ausgefallenem Resultat die Polizei rufen. Deshalb überlegen Sie sich vorher, ab wann Sie protestieren werden. Sie vereinbaren mit dem Kollegen, dass Sie erst dann die Polizei rufen werden, wenn ein Ereignis eintritt, welches bei fairer Münze so unwahrscheinlich ist, dass nur in 5 % der Fälle ein so extremes - oder noch extremeres - Resultat vorkommt. Dummerweise haben Sie aber weder Taschenrechner noch R/S-PLUS dabei, sondern nur ein Stück Papier und Bleistift. Ab wann werden Sie protestieren?

Standard

Aufgabe 34 [Unabhängigkeit in Kontingenztafel] [4+1 Punkte]

Die folgenden Daten sind aus Radelet, M. (1981): "Racial Characteristics and the Imposition of the Death Penalty." Amer. Sociol. Rev. **46**: 918-927. 326 Personen sind alle des Mordes überführt worden - es ging noch darum, ob sie die Todesstrafe erhielten oder nicht. Die Daten betreffen 20 Counties in Florida von 1976-1977.

a) Total sind es 326 Personen. Von den 166 schwarzen Angeklagten wurden 17 zum Tode verurteilt. Von den 160 weissen Angeklagten wurden 19 zum Tode verurteilt. Gibt es einen statistischen Hinweis darauf, dass die Hautfarbe einen Einfluss auf das Urteil gehabt hat? Machen Sie dazu einen statistischen Test (schalten Sie bei diesem Test in R die "Yates'-Continuity-Correction" aus).

b) Obige Frage muss mit diesen (groben) Daten klar mit "Nein" beantwortet werden. Wenn es überhaupt eine signifikante Benachteiligung gäbe, dann wäre sie eher zu Lasten der Weissen als der Schwarzen. Bei der Besprechung in den Übungen werden Sie weitere Informationen dazu erhalten. Es wird sich überraschenderweise doch zeigen, dass die Schwarzen eindeutig benachteiligt sind! Wie ist so etwas möglich?

Aufgabe 35 [KS-GoF-Test] [1+1 Punkte]

a) Generieren Sie eine 50er-Stichprobe aus einer Standard-Cauchy-Verteilung. Machen Sie damit einen KS-GoF-Test durch Vergleich mit der Standard-Normalverteilung. Plotten Sie auch hier die empirische und (hier falsche) theoretische Verteilungsfunktion auf dem gleichen Diagramm und tragen Sie das D_n von Hand korrekt ein.

b) Eine mathematisch fundierte Theorie zum Atomzerfall besagt, dass die Zeit zwischen den Zerfällen von einzelnen Atomen exponentialverteilt ist (Abnahme der Probe sei vernachlässigbar klein). Generieren Sie dazu eine 100-er Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = \mathrm{PN}$ und machen Sie einen KS-GoF-Test durch Vergleich mit der Exponentialverteilung. Durch diese Aufgabe sei unterstrichen, dass das D_n, wie in Satz 4.18 angegeben, nicht von der konkreten Verteilung abhängig ist. Das heisst: wir können die gleiche Verteilung von D_n nehmen, egal ob wir gegen eine Normalverteilung, Exponentialverteilung, Uniform-Verteilung, etc. testen!

Aufgabe 36 [ANOVA] [4 Punkte]

Das folgende Beispiel ist aus Riedwyl und Ambühl: "Statistische Auswertungen mit Regressionsprogrammen", 2000, p. 60. Wir haben eine Stichprobe von 27 byzantinischen Münzen. Von diesen ist bekannt, dass sie in vier verschiedenen Zeitabschnitten, wir nennen diese I, II, III, IV, geprägt wurden. Wir wollen den Silbergehalt der Münzen in den vier Gruppen vergleichen. Die Daten sind wie folgt:

I	II	III	IV
5.9	6.9	4.9	5.3
6.8	9.0	5.5	5.6
6.4	6.6	4.6	5.5
7.0	8.1	4.5	5.1
6.6	9.3		6.2
7.7	9.2		5.8
7.2	8.6		5.8
6.9			
6.2			

Untersuchen Sie, ob der Silbergehalt statistisch signifikant variiert. Welche Voraussetzungen werden Sie dabei machen?

Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Statistische Methoden"

Olivier Warin

6. Mai 2011

Aufgabe 33 [Asymptotische Verfahren]
Seien $n = 100$ und für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls der } i\text{-te Wurf Zahl ergibt} \\ 0, & \text{falls der } i\text{-te Wurf Kopf ergibt.} \end{cases}$$

Wenn es ein faires Spiel ist können wir davon ausgehen, dass die X_i's unabhängig voneinander sind und eine Be$(\frac{1}{2})$-Verteilung haben.

Wir wollen protestieren sobald $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant K$ gilt. Wobei wir die natürliche Zahl K so bestimmen wollen, dass

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant K\right] \doteq 5\%.$$

Dazu machen wir ein paar Umformungen:

$$5\% = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant K\right] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} \geqslant \frac{K - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}\right] \underset{\text{CLT}}{\doteq} P\left[\mathcal{N}(0,1) \geqslant \frac{2K-n}{\sqrt{n}}\right].$$

Wir schliessen:

$$\frac{2K-n}{\sqrt{n}} \doteq 1.64$$
$$\Rightarrow K \doteq \frac{1}{2}(1.64\sqrt{n} + n) = 58.2.$$

Also rufen wir ab 58 (oder 59, je nach Runden) mal Zahl die Polizei.

Aufgabe 34 [Unabhängigkeit in Kontigenztafel]

a) Aus der Aufgabenstellung erhalten wir die folgende Tabelle:

Hautfarbe	*zum Tode verurteilt*	*nicht zum Tode verurteilt*	Σ
Schwarz	17	149	166
Weiss	19	141	160
Σ	36	290	326

Nun untersuchen wir mit R, ob es mit diesen Daten einen statistischen Hinweis darauf gibt, dass die Hautfarbe einen Einfluss auf das Urteil gehabt hat:

```
> M <- matrix(c(17,19,149,141),2,2)
> chisq.test(M, correct=FALSE)

      Pearson s Chi-squared test

data:  M
X-squared = 0.2214, df = 1, p-value = 0.638

>
```

Wir schliessen damit, dass es keine signifikante Abhängigkeit gibt (ausser wenn $\alpha \dot{\geqslant} 0.638$).

b) Bei obigen Daten fehlt die sehr entscheidende Information über die Hautfarbe des Opfers. Diese zusätzlichen Daten ergeben nämlich die folgende Tabelle (Daten sind aus derselben Quelle wie die obigen Daten):

Hautfarbe des Täters	*Hautfarbe des Opfers*	*Todesstrafe ja*	*Todesstrafe nein*	*Anteil ja*
Schwarz	Schwarz	6	97	0.058
	Weiss	11	52	0.175
Weiss	Schwarz	0	9	0.000
	Weiss	19	132	0.126

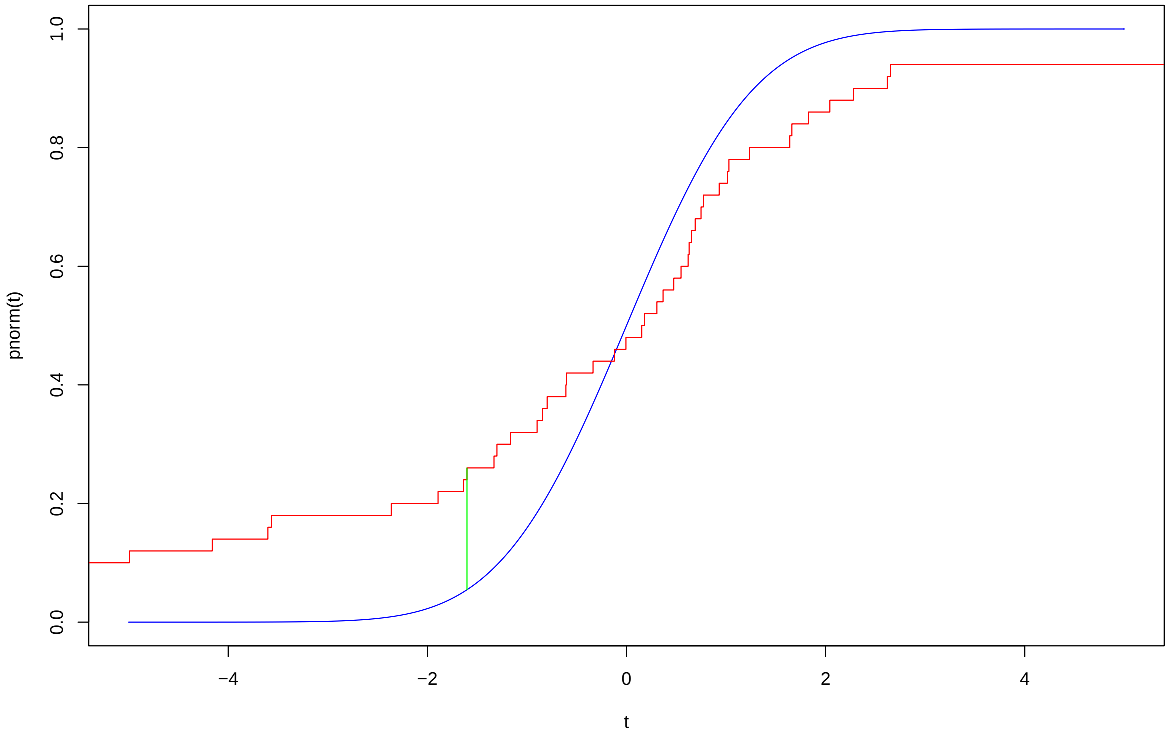
Wenn wir uns diese Tabelle etwas anschauen fällt auf, dass die Schwarzen doch benachteiligt werden. Denn laut dieser Tabelle ist es zum Beispiel “nicht so schlimm”, wenn ein Weisser einen Schwarzen ermordet hat. Andererseits ist es am “schlimmsten”, wenn ein Schwarzer einen Weissen ermordet hat.

Aufgabe 35 [KS-GoF Test]

a)
```
> n <- 50
> x <- rcauchy(n)
> ks.test(x,"pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.2054, p-value = 0.02509
alternative hypothesis: two-sided

> t <- seq(-5,5,0.01)
> plot(t,pnorm(t),type="l",col="blue")
> sx <- sort(x)
> lines(sx,(1:n)/n,type="s",col="red")
> #Jetzt suchen wir noch die Stelle mit dem maximalen Abstand:
> diff <- abs(pnorm(sx)-(1:n)/n)
> i <- which(diff==max(diff))
> #Nun zeichnen wir noch das D_n ein:
> lines(c(sx[i],sx[i]),c(i/n,pnorm(sx[i])),col="green")
>
```

Der P-Wert des Kolmogrorov-Sminorv Tests war in obiger R-Session 0.02509. Also entscheiden wir uns dafür, dass die Stichprobe *nicht* aus einer $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung stammt. (Ausser wenn $\alpha \leqslant 0.02509$)

Die obige R-Session lieferte desweiteren das folgende Bild:



Die grüne Strecke ist dabei das D_n (aus der Vorlesung).

Bemerkung: Aufgrund der Langschwänzigkeit der Cauchy-Verteilung funktioniert der Kolmogrorov-Sminorv Test hier nicht optimal. Es wäre also durchaus denkbar, dass wir oben einen Fehler zweiter Art machen würden. In unserer konkreten Simulation hatten wir einfach etwas Glück.

b)

```
> PN <- 2
> x <- rexp(100,PN)
> ks.test(x,"pexp",PN)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.0665, p-value = 0.7677
alternative hypothesis: two-sided

>
```

Also entscheiden wir uns hier dafür, dass die Stichprobe aus einer Exp(PN)-Verteilung stammt. (Ausser wenn $\alpha > 0.7677$)

Aufgabe 36 [ANOVA]

```
> silber <- c(5.9,6.8,6.4,7.0,6.6,7.7,7.2,6.9,6.2,
+     6.9,9.0,6.6,8.1,9.3,9.2,8.6,
+     4.9,5.5,4.6,4.5,
+     5.3,5.6,5.5,5.1,6.2,5.8,5.8)
> periode <- factor(rep(c("I","II","III","IV"),c(9,7,4,7)))
> muenzen <- data.frame(periode,silber)
> muenzen
   periode silber
```

```
1        I     5.9
2        I     6.8
3        I     6.4
4        I     7.0
5        I     6.6
6        I     7.7
7        I     7.2
8        I     6.9
9        I     6.2
10      II     6.9
11      II     9.0
12      II     6.6
13      II     8.1
14      II     9.3
15      II     9.2
16      II     8.6
17     III     4.9
18     III     5.5
19     III     4.6
20     III     4.5
21      IV     5.3
22      IV     5.6
23      IV     5.5
24      IV     5.1
25      IV     6.2
26      IV     5.8
27      IV     5.8
> analyse <- aov(silber~periode, muenzen)
> summary(analyse)
            Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
periode      3 37.748 12.5825  26.272 1.306e-07 ***
Residuals   23 11.015  0.4789
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
>
```

Der P-Wert liegt also bei $1.306 \cdot 10^{-7}$. Somit entscheiden wir uns dafür, dass die Erwartungswerte nicht alle übereinstimmen. (Ausser falls $\alpha \leqslant 1.306 \cdot 10^{-7}$).

Damit wir so mit diesem Test argumentieren können haben wir die folgenden Annahmen gemacht:

- Der Silbergehalt innerhalb einer Periode ist normalverteilt.
- Die Varianzen in jeder Periode sind gleich.
- Unabhängigkeit des Silbergehalts der einzelnen Münzen