Dr. Christof Luchsinger

Übungsblatt 9 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Schätztheorie und Konfidenzintervalle

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 18, Abgabe der Lösungen: Woche 19 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 20

Must

Aufgabe 37 [Eigenschaften von Schätzern]

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung. Geben Sie *einfache* Beispiele für:

a) einen Schätzer für μ, der zwar erwartungstreu, aber nicht konsistent ist.

b) einen Schätzer für μ, der zwar konsistent, aber nicht erwartungstreu ist.

Aufgabe 38 [$MSE = V + b^2$, Lemma 5.6]

Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus 5.1.3 gilt:

$$MSE(\hat{\mu}_n, \mu) = V[\hat{\mu}_n] + b^2.$$

Aufgabe 39 [Eindeutigkeit von KI's]

Konfidenzintervalle sind nicht eindeutig (zB gibt es immer das vollrandomisierte KI). Geben Sie eine (einfache, bekannte) Situation an, in der Sie dann 2 nichttriviale KI's angeben.

Aufgabe 40 [Konfidenzintervalle]

Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ erhält man einen mittleren Durchmesser $\bar{x} = 10.2$ mm und eine Streuung

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2} = 0.62\,\text{mm}.$$

Bestimmen Sie hieraus Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 zum Niveau $1-\alpha = 0.95$.

Aufgabe 41 [Konfidenzintervalle]

Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit $\sigma = 1.04$ mm beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 300$ ergab sich $\bar{x} = 12.14$ mm. Bestimmen Sie für die Vertrauenswahrscheinlichkeit von 0.99 die Grenzen des KI für den mittleren Durchmesser dieser Kugeln.

Standard

Aufgabe 42 [MLE bei der Poissonverteilung] [2 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten $x_1, \ldots, x_n$ aus einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: Benutzen Sie *unbedingt* den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 43 [MLE bei der Exponentialverteilung] [2 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten $x_1, \ldots, x_n$ aus einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: Benutzen Sie *unbedingt* den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 44 [Erwartungstreuer Schätzer der Varianz] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid-Zufallsgrössen mit $E[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz. Dieses Resultat gilt übrigens für beliebige Verteilungen! "Tipp": einfach drauflosrechnen.

Aufgabe 45 [Momentenmethode] [2 Punkte]

Sei $x_1, \ldots, x_k$ eine Stichprobe aus einer Gamma(n, λ)-Verteilung, $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$. Schätzen Sie mit Hilfe der Momentenmethode n und λ.

Aufgabe 46 [Cramer-Rao-Schranke im diskreten Fall] [2+2 Punkte]

Formulieren Sie die Cramer-Rao-Schranke für diskrete Zufallsgrössen und berechnen Sie die Schranke im Fall der Poisson-Verteilung.

Honours

Aufgabe 47 [Uniformverteilung und MLE] [1+1+1 Punkte]

a) Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[0, \theta]$-Zufallsgrösse. Geben Sie den MLE für diese Verteilungsfamilie an. Schreiben Sie dazu die gemeinsame Dichtefunktion exakt auf und maximieren Sie diese ohne abzuleiten.

b) Suchen Sie eine reelle Zahl a, damit der MLE-Schätzer aus a) mit a multipliziert erwartungstreu ist (mit Beweis).

c) Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[\theta, \theta + 1]$-Verteilung. Geben Sie einen sinnvollen Schätzer für θ an, welcher $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ benutzt/kombiniert. Überprüfen Sie diesen Schätzer auf Erwartungstreue.

Aufgabe 48 [Vervollständigung des Beweises der Cramer-Rao-Schranke] [6 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis der Cramer-Rao-Schranke (Ableitungen unter dem Integral) mit Hilfe des Satzes der majorisierten Konvergenz von Lebesgue im stetigen Fall.

Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Statistische Methoden"

Olivier Warin

15. Mai 2011

Aufgabe 37 [Eigenschaften von Schätzern]
Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung.

a) Definiere $\widehat{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) := x_1$.

Behauptung: Der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ von μ ist erwartungstreu aber *nicht* konsistent.

Beweis: Es gilt:

$$E_\mu[\widehat{\mu}_n] \;=\; E_\mu[X_1] \;=\; \mu,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 5.2) erwartungstreu. Weiter gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;=\; P_\mu[|X_1 - \mu| > \varepsilon] \;=\; P[|\mathcal{N}(0, \sigma^2)| > \varepsilon] \;\neq\; 0,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 5.3) *kein* konsistenter Schätzer für μ.

$\blacksquare$

b) Definiere $\widehat{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) := \overline{x} + {}^1\!/\!_n$.

Behauptung: Der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ von μ ist konsistent aber *nicht* erwartungstreu.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ mit $n > {}^2\!/\!_\varepsilon$, also ${}^1\!/\!_n < {}^\varepsilon\!/\!_2$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;&=\; P_\mu[|\overline{X} - \mu + {}^1\!/\!_n| > \varepsilon] \;\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| + {}^1\!/\!_n > \varepsilon] \\ &\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| > \varepsilon - {}^1\!/\!_n] \;\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| > {}^\varepsilon\!/\!_2] \;\underset{\text{LLN}}{\xrightarrow{n\to\infty}}\; 0, \end{aligned}$$

wobei wir hier am Schluss das Gesetz der grossen Zahlen benutzt haben. Wir schliessen:

$$\lim_{n\to\infty} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;=\; 0,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 5.3) ein konsistenter Schätzer für μ.

Weiter gilt:

$$E_\mu[\widehat{\mu}_n] \;=\; E_\mu[\overline{X} + {}^1\!/\!_n] \;\underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}}\; E_\mu[\overline{X}] + {}^1\!/\!_n \;=\; \mu + {}^1\!/\!_n \;\neq\; \mu,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 5.2) *kein* erwartungstreuer Schätzer für μ.

$\blacksquare$

Bemerkung: Man sagt, dass der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ *asymptotisch erwartungstreu* ist, da $\lim_{n\to\infty} E_\mu[\widehat{\mu}_n] = \mu$.

Aufgabe 38 [$MSE = V + b^2$, Lemma 5.6]
Es sei $\widehat{\mu}_n$ ein Schätzer für μ mit Bias b.

Behauptung: Dann gilt:

$$MSE(\widehat{\mu}_n, \mu) \;=\; V_\mu[\widehat{\mu}_n] + b^2.$$

Beweis: Es gilt:

$$V_\mu[\widehat{\mu}_n] \underset{3.7a)}{\overset{\text{Lem}}{=}} V_\mu[\widehat{\mu}_n - \mu] \underset{3.7b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} E_\mu[(\widehat{\mu}_n - \mu)^2] - (E_\mu[\widehat{\mu}_n - \mu])^2 \;=\; MSE(\widehat{\mu}_n, \mu) - b^2,$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Definitionen 5.2 und 5.5 eingesetzt haben. Somit folgt die Behauptung sofort.

■

Aufgabe 39 [Eindeutigkeit von KI's]
Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, \cdots, x_n$ aus einer $\mathcal{N}(\mu, 1)$-Verteilung. Nun werden wir zwei verschiedene 95%-KI's für μ angeben:

Zunächst haben wir das aus 5.2.3.1 bekannte KI:

$$KI_1 \;=\; \left[\overline{X} - \frac{K}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{K}{\sqrt{n}}\right],$$

wobei $K \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $P[\mathcal{N}(0,1) \leqslant K] = 0.975$. Also $K \underset{\text{R}}{\doteq}$ `qnorm(0.975)` $\underset{\text{R}}{\doteq} 1.959964$.

KI_1 ist klar ein 95%-KI für μ.

Wir definieren weiter

$$KI_2 \;=\; \left[\overline{X} - \frac{K'}{\sqrt{n}}, \infty\right),$$

wobei $K' \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $P[\mathcal{N}(0,1) \leqslant K'] = 0.95$. Also $K' \underset{\text{R}}{\doteq}$ `qnorm(0.95)` $\underset{\text{R}}{\doteq} 1.644854$.

KI_2 ist ebenfalls ein 95%-KI für μ, denn es gilt

$$P_\mu[\mu \in KI_2] = P_\mu\left[\overline{X} - \frac{K'}{\sqrt{n}} \leqslant \mu\right] \;=\; P[\mathcal{N}(0,1) \leqslant K'] \;=\; 0.95.$$

Damit haben wir zwei verschiedene nicht-tiviale 95%-KI's für μ gefunden.

Aufgabe 40 [Konfidenzintervalle]
Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ erhält man einen mittleren Durchmesser $\overline{x} = 10.2$ mm und eine Streuung

$$\widehat{\sigma} \;=\; \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{30}(x_i - \overline{x})^2} \;=\; 0.62 \text{ mm}.$$

Nach 5.2.3.2 ist nun eine Realisation eines $(1 - \alpha) = 95\%$-KIs für den Erwartungswert μ gegeben durch

$$\left[\overline{x} - \frac{t^*\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t^*\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right],$$

wobei t^* der entsprechende kritische Wert ist. Genauer gilt hier: $P[-t^* \leqslant t_{n-1} \leqslant t^*] = 1 - \alpha$, also

$$t^* \underset{\text{R}}{\doteq} \texttt{qt(1-0.05/2,30-1)} \underset{\text{R}}{\doteq} 2.045230.$$

Wir erhalten also die folgende Realisation eines $(1 - \alpha)$-KIs für den Erwartungswert μ:

$$\left[\overline{x} - \frac{t^*\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t^*\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] \underset{\text{R}}{\doteq} [9.968488, 10.43151].$$

Aufgabe 41 [Konfidenzintervalle]
Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit Standardabweichung $\sigma = 1.04$ mm und (unbekanntem) Erwartungswert μ beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ vom Umfang $n = 300$ ergab sich $\overline{x} = 12.14$ mm.

Seien $\alpha := 0.01$ und $K \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt: $P[-K \leqslant \mathcal{N}(0,1) \leqslant K] = 1 - \alpha$. Es gilt also

$$K \underset{\text{R}}{\doteq} \texttt{qnorm(1-0.01/2)} \underset{\text{R}}{\doteq} 2.575829.$$

Analog wie wir in 5.3.2.1 gesehen haben, ist

$$\left[\overline{x} - \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}\right] \doteq [11.98534, 12.29466]$$

eine Realisation eines $1 - \alpha = 99\%$-KI für μ.

Aufgabe 42 [MLE bei der Poissonverteilung]
Sei $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ eine Stichprobe einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Sei $p_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion. Hier gilt also

$$p_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{II}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^{n\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

Wir wollen nun den Maximum Likelihood Estimator (MLE) $\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ für λ bestimmen. Nach 7.1.4 gilt

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}}\, p_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Da $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, folgt damit:

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} &= \underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}} \log(p_\lambda(x_1, \ldots, x_n)) = \underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}} \left(-n\lambda + \log(\lambda) n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)\right) \\ &= \underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}} \left(n(-\lambda + \log(\lambda)\overline{x})\right) = \underset{\lambda>0}{\operatorname{argmax}} \left(-\lambda + \log(\lambda)\overline{x}\right)\end{aligned}$$

Wir suchen also die Maximumsstelle der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(\lambda) = -\lambda + \log(\lambda)\overline{x}$. Dazu leiten wir g zweimal ab:

$$\frac{dg}{d\lambda}(\lambda) = -1 + \frac{\overline{x}}{\lambda}, \quad \frac{d^2 g}{d\theta^2}(\theta) = -\frac{\overline{x}}{\lambda^2} < 0.$$

$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ ist also einfach die Nullstelle von $\frac{dg}{d\theta}$. Somit folgt:

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \overline{x}.$$

Dieses Resultat macht Sinn, da z.B. dieser Schätzer erwartungstreu und konsistent für $E[X_1] = \lambda$ ist.

Aufgabe 43 [MLE bei der Exponentialverteilung]
Sei $x_1, \ldots, x_n > 0$ eine Stichprobe einer $\text{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsgrösse. Sei $f_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende gemeinsame Dichtefunktion. Es gilt hier

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{II}}{=} \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-n\lambda\overline{x}}.$$

Wir wollen nun den Maximum Likelihood Estimator (MLE) $\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ für λ bestimmen. Nach 5.1.4 gilt

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \underset{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}}\, f_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

und da $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, folgt:

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \underset{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}} \log(f_\lambda(x_1, \ldots, x_n)) = \underset{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}}(n\log(\lambda) - n\lambda\overline{x}) = \underset{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}}(\log(\lambda) - \lambda\overline{x}).$$

Wir suchen also die Maximumsstelle der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(\lambda) := \log(\lambda) - \lambda\overline{x}$. Dazu leiten wir g zweimal ab:

$$\frac{dg}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \overline{x}, \quad \frac{d^2 g}{d\lambda^2}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} < 0.$$

$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ ist also einfach die Nullstelle von $\frac{dg}{d\lambda}$. Somit folgt:

$$\frac{1}{\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}} - \overline{x} = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Dieses Resultat macht Sinn, da $\overline{x}$ bekanntlich ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für $E[X_1]$ ist und es gilt hier $E[X_1] = 1/\lambda$.

Aufgabe 44 [Erwartungstreuer Schätzer der Varianz]
Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid-Zufallsgrössen mit $E[X_1^2] < \infty$.

Behauptung: Der Ausdruck

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz $V[X_1]$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2\right] &\overset{\text{iid}}{=} nE[(X_1 - \overline{X})^2] \;=\; nV[X_1 - \overline{X}] \;=\; nV\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=2}^n X_i\right] \\
&\overset{\text{II}}{=} n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 V[X_1] + \frac{n}{n^2}\sum_{i=2}^n V[X_i] \overset{\text{iid}}{=} \left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n}\right)V[X_1] \\
&= (n-1)V[X_1].
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.

■

Aufgabe 45 [Momentenmethode]
Es sei $x_1, \ldots, x_k > 0$ eine Stichprobe aus einer $\Gamma(n, \lambda)$-Verteilung, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Nun wollen wir λ und n mit Hilfe der Momentenmethode schätzen.

Es gilt

$$E[X_1] \;=\; \frac{n}{\lambda} \quad \text{und} \quad E[X_1^2] \;=\; V[X_1] + (E[X_1]) \;=\; \frac{n+n^2}{\lambda^2}.$$

Die Momentenmethode liefert damit für die Schätzer $\hat{\lambda}_k$ und $\hat{n}_k$ die folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i \;=\; \frac{\hat{n}_k}{\hat{\lambda}_k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i^2 \;=\; \frac{\hat{n}_k + \hat{n}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}.$$

Mit den Abkürzungen $\overline{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i$ und $\tilde{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x_i^2$ finden wir damit

$$\hat{\lambda}_k \;=\; \frac{\overline{x}}{\tilde{x} - \overline{x}^2} \quad \text{und} \quad \hat{n}_k \;=\; \frac{\overline{x}^2}{\tilde{x} - \overline{x}^2}.$$

Bemerkung: Natürlich weiss man bereits im Voraus, dass n eine natürliche Zahl ist. Also kann man beim Schätzer $\hat{n}_k$ am Ende noch runden, um eine natürliche Zahl zu erhalten.

Aufgabe 46 [Cramer-Rao-Schranke im diskreten Fall]
Hier eine mögliche Formulierung der Cramer-Rao-Schranke im diskreten Fall:

Satz (Cramer-Rao-Schranke, diskret) *Sei $\hat{\theta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter θ von einer diskreten Zufallsgrösse X. Dann gilt*

$$V_\theta[\hat{\theta}] \geqslant \frac{1}{I_\theta}, \tag{CR-Ungl}$$

wobei

$$I_\theta \;=\; \sum_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(p(\boldsymbol{x}, \theta))\right)^2 p(\boldsymbol{x}, \theta).$$

$p(\boldsymbol{x}, \theta)$ bezeichnet dabei die entsprechende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Wir fordern dazu (Regularity)

a) Der Wertebereich der Zufallsgrösse X darf nicht von θ abhängen.

b) Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(\boldsymbol{x}, \theta)$ muss nach θ differenzierbar sein.

c) Für ein gegebenes θ gibt es eine kleine Nachbarschaft N_θ von θ, so dass

$$\sum_{\boldsymbol{x}} \sup_{\psi \in N_\theta} \left| \frac{\partial}{\partial \psi} p(\boldsymbol{x}, \psi) \right| < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{\boldsymbol{x}} \sup_{\psi \in N_\theta} \left| \hat{\theta}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \psi} p(\boldsymbol{x}, \psi) \right| < \infty.$$

Konkret gilt bei einer Po(θ)-Verteilung:

$$\begin{aligned} I_\theta &\overset{\text{siehe}}{\underset{\text{Bew.}}{=}} V_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log(p(\boldsymbol{X}, \theta)) \right] \overset{\text{Aufg.}}{\underset{42}{=}} V_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-n\theta + \log(\theta) n \overline{\boldsymbol{X}} - \sum_{i=1}^n \log(X_i!) \right) \right] \\ &= V_\theta \left[-n + \frac{n \overline{\boldsymbol{X}}}{\theta} \right] = \frac{n^2}{\theta^2} V_\theta[\overline{\boldsymbol{X}}] = \frac{n^2}{\theta^2} \frac{\theta}{n} = \frac{n}{\theta}. \end{aligned}$$

Also lautet die Schranke $\frac{\theta}{n}$, welche mit dem Schätzer $\hat{\theta} = \overline{x}$ auch erreicht wird.

Aufgabe 47 [Uniformverteilung und MLE]

a) Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[0, \theta]$-Zufallsgrösse. Wir wollen nun den MLE-Schätzer $\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}$ für θ bestimmen.

Die entsprechende gemeinsame Dichtefunktion f_θ lautet wie folgt:

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \theta^{-n}, & \text{falls } x_1, \ldots, x_n \in [0, \theta] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schliessen

$$\hat{\theta}_n^{\text{MLE}} = \underset{\theta \in \mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}} f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \min\{\theta \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, x_1, \ldots, x_n \leqslant \theta\} = \max\{x_1, \ldots, x_n\} = x_{(n)}.$$

b) Nun suchen wir ein $a \in \mathbb{R}$, so dass der Schätzer $a\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

Um dies zu tun berechnen wir erst die Verteilungsfuktion G_θ und dann durch Ableiten die Dichtefunktion g_θ von $\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}$. Für $x \in [0, \theta]$ gilt:

$$\begin{aligned} &G_\theta(x) = P_\theta[\hat{\theta}_n^{\text{MLE}} \leqslant x] = P_\theta[X_{(n)} \leqslant x] = P_\theta[X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x] \overset{\text{iid}}{=} P_\theta[X_1 \leqslant x]^n = \frac{x^n}{\theta^n} \\ &\Rightarrow g_\theta(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}. \end{aligned}$$

Da $a\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}$ erwartungstreu sein soll erhalten wir damit die folgende Gleichung:

$$\theta = E_\theta[a\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}] = aE_\theta[\hat{\theta}_n^{\text{MLE}}] = a \int_0^\theta x g_\theta(x) dx = a \int_0^\theta \frac{n x^n}{\theta^n} dx = \frac{an}{n+1} \theta,$$

woraus wir sofort folgern:

$$a = \frac{n+1}{n}.$$

c) Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[\theta, \theta+1]$-Verteilung. Nun suchen wir einen sinnvollen Schätzer $\hat{\theta}_n$ für θ, der $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ benutzt/kombiniert. Konkret nehmen wir

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(n)}) - \frac{1}{2},$$

denn $\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ sollte etwa bei $\theta + \frac{1}{2}$ liegen.

Nun wollen wir diesen Schätzer noch auf Erwartungsteue untersuchen. Ähnlich wie in a) bestimmen wir

$$E[X_{(1)}] = \theta + \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad E[X_{(n)}] = \theta + \frac{n}{n+1}.$$

Wir schliessen

$$E[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{2}(E[X_{(1)}] + E[X_{(n)}]) - \frac{1}{2} = \theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1\right) = \theta.$$

Also ist unser Schätzer $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu.

Aufgabe 48 [Vervollständigung des Beweises der Cramer-Rao-Schranke]
Wir benutzen die gleichen Notationen und die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 5.9 im Skript.

Behauptung: Es gilt

$$\int \frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x} \text{ und } \int \hat{\theta}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int \hat{\theta}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x}.$$

Beweis: Es sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Nullfolge. Weiter definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h_n) - f(\boldsymbol{x},\theta)}{h_n}.$$

Nach Voraussetzung muss ja $f(\boldsymbol{x},\theta)$ nach θ differenzierbar sein, somit gilt

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x},\theta) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h) - f(\boldsymbol{x},\theta)}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h_n) - f(\boldsymbol{x},\theta)}{h_n}.$$

Für n genügend gross liegen θ und $\theta + h_n$ klar in der kleinen Nachbarschaft N_θ von θ. Damit folgt sofort mit dem Mittelwertsatz:

$$|f_n(\boldsymbol{x})| \leqslant \sup_{\psi\in N_\theta}\left|\frac{\partial}{\theta\psi} f(\boldsymbol{x},\psi)\right| =: g(\boldsymbol{x}).$$

Laut (Regularity) ist g integrierbar, also können wir g als Majorante im Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesque einsetzen. Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x}. \qquad (*)$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz sagt uns insbesondere, dass der Grenzwert auf der linken Seite existiert. Aufrund von $(*)$ ist dieser Grenzwert sogar unabhängig von der Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schliessen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int f_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \lim_{n\to\infty}\int \frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h_n) - f(\boldsymbol{x},\theta)}{h_n}d\boldsymbol{x} = \lim_{h\downarrow 0}\int \frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h) - f(x,\theta)}{h}d\boldsymbol{x} \\ &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{\int f(\boldsymbol{x},\theta+h)d\boldsymbol{x} - \int f(\boldsymbol{x},\theta)}{h} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Die Kombination von dieser Gleichung mit $(*)$ liefert die erste Gleichung.

Für die zweite Gleichung gehen wir analog vor: Sei wieder $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Nullfolge. Weiter definiere

$$e_n(x) = \hat{\theta}(\boldsymbol{x})\frac{f(\boldsymbol{x},\theta+h_n) - f(\boldsymbol{x},\theta)}{h_n}.$$

Analog wie beim Beweis der ersten Gleichung gilt hier $\lim_{n\to\infty} e_n(\boldsymbol{x}) = \hat{\theta}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\boldsymbol{x},\theta)$. Wie oben liegen θ und $\theta + \frac{1}{n}$ für n genügend gross klar in der Nachbarschaft N_θ. Somit folgt mit dem Mittelwertsatz

$$|h_n(\boldsymbol{x})| \leqslant \sup_{\psi\in N_\theta}\left|\hat{\theta}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\psi} f(\boldsymbol{x},\psi)\right| =: \ell(x).$$

Laut (Regularity) ist ℓ integrierbar. Also können wir ℓ als Majorante im Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesque einsetzen. Wir schliessen

$$\lim_{n\to\infty}\int e_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \lim_{n\to\infty} e_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \hat{\theta}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\theta} f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x}.$$

Genau wie zuvor folgt nun noch

$$\lim_{n\to\infty}\int e_n(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int \hat{\theta}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x},\theta)d\boldsymbol{x}$$

und damit die zweite Gleichung.

■