Dr. Christof Luchsinger

Übungsblatt 11 zur Vorlesung
"Statistische Methoden" - freiwilliger Teil

Rechnen mit Matrizen, Multivariate Normalverteilung

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 20, Abgabe der Lösungen: Woche 21 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 22 (Dienstag und Mittwoch)

Must

Aufgabe 55 [Idempotente Matrizen I]

Zeigen Sie mit der Notation aus Kapitel 6:

a) M^z ist idempotent.

b) $M^z\mathbf{1} = \vec{0}$ und damit auch $\mathbf{1}^t M^z = (\vec{0})^t$

c) unter Verwendung von M^z: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$

d) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (\vec{x})^t M^z \vec{x}$

e) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = (\vec{x})^t M^z \vec{y}$

Aufgabe 56 [Idempotente Matrizen II]

Zeigen Sie mit der Notation aus Kapitel 6:

a) H und M sind symmetrisch und idempotent

b) $HA = A$

c) H und M sind orthogonal zueinander, das heisst, es gilt: $HM = 0$.

Standard

Aufgabe 57 [Rang$(H) = k$] [4 Punkte]

Sei A eine $(n \times k)$-Matrix, $n \geq k$ und Rang$(A) = k$ (voller Rang). Zeigen Sie: $H := A(A^tA)^{-1}A^t$ hat auch Rang k.

Aufgabe 58 [Idempotente Matrizen III] [1 Punkt]

Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte von idempotenten Matrizen sind entweder 0 oder 1.

b) Für idempotente, symmetrische Matrizen A gilt: Rang$(A) = \mathrm{tr}(A)$.

Aufgabe 59 [Niveaulinien und Kovarianz] [4 Punkte]

Betrachten wir die Dichte einer bivariaten Normalverteilung $\mathrm{MVN}_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$. Was lässt sich über die Niveaulinien aussagen. Betrachten Sie insbesondere die Fälle

a) $\mu = (1,1)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\mu = (0,0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\mu = (0,0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\mu = (0,0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und machen Sie jeweils eine Skizze dazu.

Honours

Aufgabe 60 [Randdichten der Multivariaten Normalverteilung] [2 Punkte]

Sei $\mathbf{X}$ eine $\mathrm{MVN}_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$-Zufallsgrösse. Dabei sei

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie ist die Dichte der ersten Komponente X_1 dieses zweidimensionalen Zufallsvektors (mit Beweis bitte)?

Übungsblatt 11 zur Vorlesung "Statistische Methoden"

Olivier Warin

30. Mai 2011

Aufgabe 55 [Idempotenze Matrizen I]
Wir benutzen in der ganzen Aufgabe die Notationen aus Kapilel 6.

a) **Behauptung:** Die Matrix M^z ist idempotent.

Beweis: Nach Definition von M^z gilt

$$(M^z)^2 = (\boldsymbol{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t)^2 \;=\; \boldsymbol{I_n}^2 - \boldsymbol{I_n}\frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t\boldsymbol{I_n} + \frac{1}{n^2}\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{1}^t\mathbf{1}}_{=n}\mathbf{1}^t \;=\; \boldsymbol{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t \;=\; M^z.$$

■

b) **Behauptung:** Es gilt $M^z\mathbf{1} \;=\; \vec{0}$ und damit auch $\mathbf{1}^tM^z = (\vec{0})^t$

Beweis: Wiederum nach der Definition von M^z gilt

$$M^z\mathbf{1} = (\boldsymbol{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^t)\mathbf{1} \;=\; \mathbf{1} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{1}^t\mathbf{1}}_{=n} \;=\; \vec{0}.$$

■

c) **Behauptung:** Es gilt $\sum_{i=1}^n(x_i - \overline{x}) = 0$.

Beweis: Wie wir in 6.3.5.1 gesehen haben gilt

$$M^z\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix}.$$

Wir schliessen daraus

$$\sum_{i=1}^n(x_i - \overline{x}) = \mathbf{1}^tM^z\vec{x} \overset{\text{b)}}{=} (\vec{0})^t\vec{x} \;=\; 0.$$

■

d) **Behauptung:** Es gilt $\sum_{i=1}^n(x_i - \overline{x})^2 = (\vec{x})^tM^z\vec{x}$.

Beweis: Da M^z klar symmetrisch ist, schliessen wir

$$(\vec{x})^tM^z\vec{x} \overset{\text{a)}}{=} (\vec{x})^t(M^z)^2\vec{x} \;=\; (\vec{x})^t(M^z)^tM^z\vec{x} \;=\; (M^z\vec{x})^tM^z\vec{x}$$

$$\overset{6.3.5.1}{=} \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ x_2 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix} \;=\; \sum_{i=1}^n(x_i - \overline{x})^2.$$

■

e) **Behauptung:** Es gilt $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(\vec{x})^t M^z\vec{y}$.

Beweis: Analog wie in d) schliessen wir

$$(\vec{x})^t M^z\vec{y} \stackrel{\text{a)}}{=} (\vec{x})^t (M^z)^2\vec{y} \;=\; (\vec{x})^t (M^z)^t M^z\vec{y} \;=\; (M^z\vec{x})^t M^z\vec{y}$$
$$\stackrel{6.3.5.1}{=} \begin{pmatrix} x_1-\overline{x} \\ x_2-\overline{x} \\ \vdots \\ x_n-\overline{x} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} y_1-\overline{y} \\ y_2-\overline{y} \\ \vdots \\ y_n-\overline{y} \end{pmatrix} \;=\; \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}).$$

■

Aufgabe 56 [Idempotenze Matrizen II]
Wir benutzen wieder die Notationen aus Kapitel 6.

a) **Behauptung:** Die Matrizen H und M sind symmetrisch und idempotent.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
H^t &= (A(A^tA)^{-1}A^t)^t \;=\; (A^t)^t((A^tA)^{-1})^tA^t \;=\; A((A^tA)^t)^{-1}A^t \;=\; A(A^tA)^{-1}A^t \;=\; H\\
M^t &= (\boldsymbol{I_n}-H)^t \;=\; \boldsymbol{I_n}^t - H^t \;=\; \boldsymbol{I_n}-H\\
H^2 &= A(A^tA)^{-1}\underbrace{A^tA(A^tA)^{-1}}_{=\boldsymbol{I_k}}A^t \;=\; A(A^tA)^{-1}A^t \;=H\\
M^2 &= (\boldsymbol{I_n}-H)^2 \;=\; \boldsymbol{I_n}-\boldsymbol{I_n}H-H\boldsymbol{I_n}+\underbrace{H^2}_{=H} \;=\; \boldsymbol{I_n}-H \;=\; M.
\end{aligned}$$

■

b) **Behauptung:** Es gilt $HA=A$.

Beweis:

$$HA = A\underbrace{(A^tA)^{-1}A^tA}_{=\boldsymbol{I_k}} \;=\; A.$$

■

c) **Behauptung:** H und M sind orthogonal zueinander, das heisst es gilt $HM=0$.

Beweis: Es gilt

$$HM = H(\boldsymbol{I_n}-H) \;=\; H-H^2 \stackrel{\text{a)}}{=} 0.$$

■

Aufgabe 57 [Rang($\boldsymbol{H}$) = $\boldsymbol{k}$]
Sei A eine $(n\times k)$-Matrix, $n \geqslant k$ und Rang$(A)=k$ (voller Rang).

Behauptung: Die Matrix $H:=A(A^tA)^{-1}A^t$ hat auch Rang k.

Beweis: Nach Aufgabe 56 a) ist H symmetrisch und idempotent. Also gilt nach Aufgabe 58 b):

$$\text{Rang}(H)=\text{tr}(H) \;=\; \text{tr}(A(A^tA)^{-1}A^t) \;=\; \text{tr}(A^tA(A^tA)^{-1}) \;=\; \text{tr}(\boldsymbol{I_k}) \;=\; k.$$

Wir haben dabei das Kommutativgesetz der Addition in $\mathbb{R}$ benutzt. Genauer wissen wir aus der linearen Algebra, dass $\text{tr}(MN)=\text{tr}(NM)$ für Matrizen M und N (sofern beide Produkte überhaupt Sinn machen natürlich). Hier haben wir dies mit $M=A(A^tA)^{-1}$ und $N=A^t$ eingesetzt. (Bei mehr als zwei Matrizen wäre dies allerdings im Allgemeinen nur bei zyklischen Vertauschungen erlaubt.)

■

Aufgabe 58 [Idempotente Matrizen III]

a) **Behauptung:** Die Eigenwerte von idempotenten Matrizen sind entweder 0 oder 1.

Beweis: Sei A eine idempotente Matrix. Seien weiter λ ein Eigenwert und $v \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Es gilt also $Av = \lambda v$ und damit

$$A^2 v = AAv = A\lambda v = \lambda^2 v$$
$$A^2 v = Av = \lambda v.$$

Daraus schliessen wir $\lambda = \lambda^2$ und damit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

■

b) **Behauptung:** Für idempotente, symmetrische Matrizen A gilt $\text{Rang}(A) = \text{tr}(A)$.

Beweis: Da A symmetrisch ist, ist A klar diagonalisierbar (Spektralsatz). Daraus folgt, dass der Rang gerade die Anzahl Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt), die nicht Null sind, ist.

Wie wir in a) gesehen haben, sind die Eigenwerte von A 0 oder 1. Daraus folgt sofort die Behauptung.

■

Bemerkung: Bei a) spielt es keine Rolle über welchem Körper wir die idempotente Matrizen betrachten.

Beim Beweis von b) haben wir den Spektralsatz benutzt. Dieser setzt reelle Matrizen voraus. Allerdings ist die Aussage auch über einem beliebigen Körper mit Charakteristik 0 richtig, da idempotente Matrizen sowieso immer diagonalisierbar sind. Die Eigenschaft "symmetrisch" braucht man also nicht.

Aufgabe 59 [Niveaulinien und Kovarianz]

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Dichtefunktion einer $\text{MVN}_2(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$-Zufallsgrösse. In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die Niveaulinien dieser Dichtefunktion. Allgemein gilt für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$:

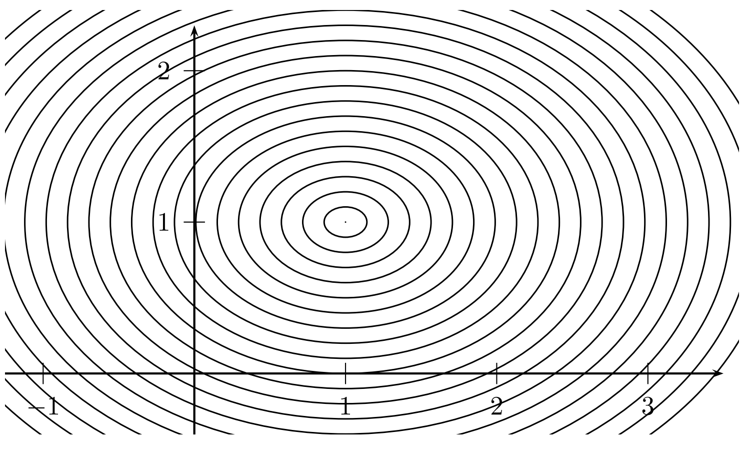
$$c = f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-\mu)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu) = C,$$

für ein gewisses $C \in \mathbb{R}$.

a) Falls $\mu = (1,1)^t$ und $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so folgt aus obiger allgemeiner Überlegung mit $\boldsymbol{x} = (x,y)$

$$f(\boldsymbol{x}) = c \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 + (y-1)^2 = C,$$

für eine gewisse reelle Zahl C. Also sind die Niveaulinien hier Ellipsen, wie in der folgenden Skizze angedeutet:

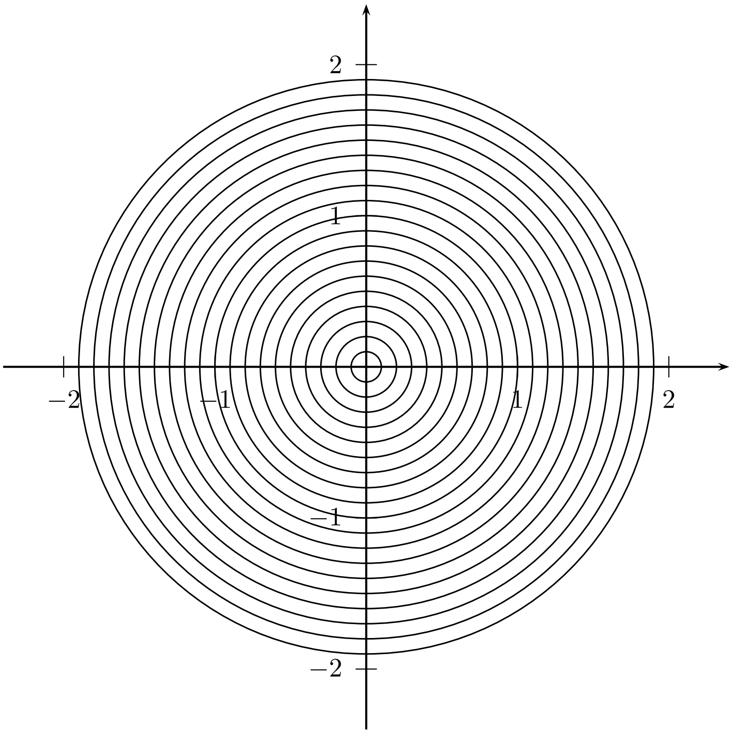


Bemerkung: Beachten Sie bitte, dass die Hauptachsen der Ellipsen von den Höhenlinien das Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ haben (Standardabweichungen) und nicht $1 : 2$ (Varianzen).

b) Falls $\mu = (0, 0)^t$ und $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so folgt aus obiger allgemeiner Überlegung mit $\boldsymbol{x} = (x, y)$

$$f(\boldsymbol{x}) = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C,$$

für eine gewisse Zahl $C \in \mathbb{R}$. Also sind die Niveaulinien hier Kreise, wie in der folgenden Skizze angedeutet:

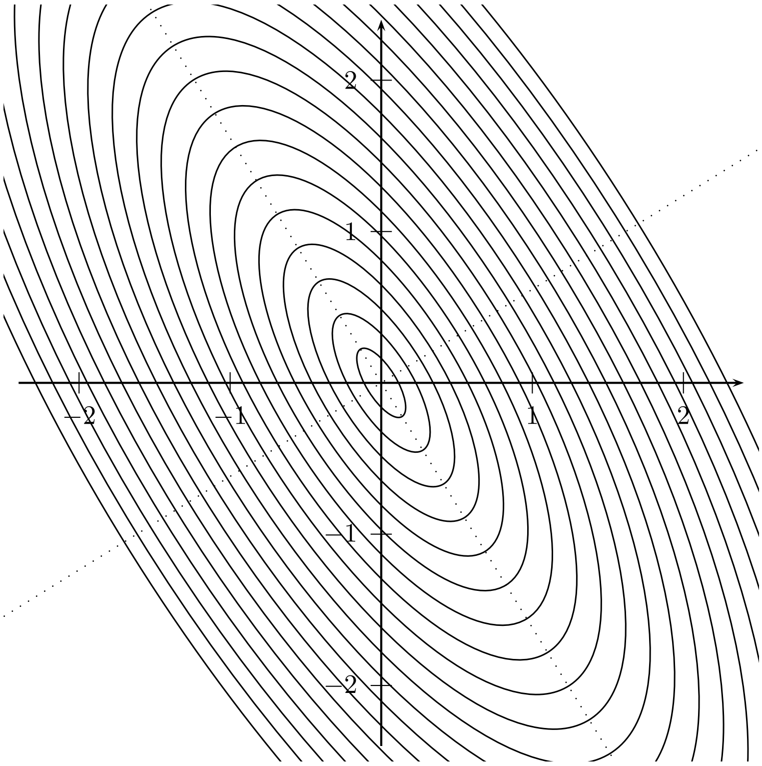


c) Falls $\mu = (0, 0)^t$ und $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, so folgt $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{\Sigma}^{-1}$ ist klar positiv definit. Dies impliziert, dass die Niveaulinien hier Ellipsen sind. Um die genaue Lage dieser Ellipsen zu bestimmen, berechnen wir noch schnell die Eigenwerte von $\mathbf{\Sigma}^{-1}$: Diese lauten $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Weiter lauten zugehörige Eigenvektoren wie folgt:

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 \mp \sqrt{5} \\ \pm 2\sqrt{5} - 4 \end{pmatrix}.$$

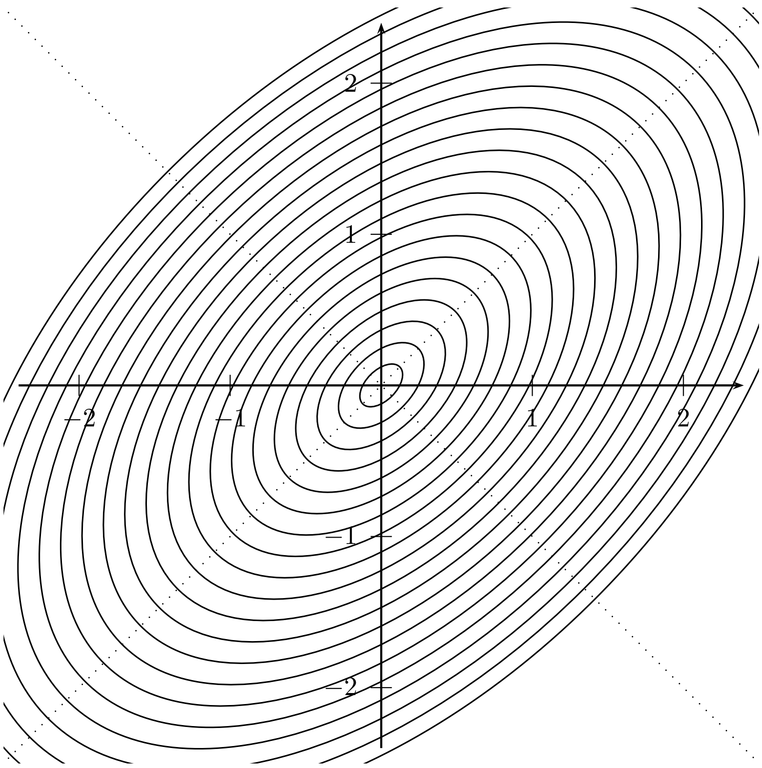
Diese Informationen liefern uns die folgende Skizze:



d) Falls $\mu = (0,0)^t$ und $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, so folgt sofort $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte von $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ lauten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Ausserdem lauten zugehörige Eigenvektoren wie folgt:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Niveaulinien hier Ellipsen in der Lage wie in der folgenden Skizze angedeutet:



Bemerkung: Diese Höhenlininen sind allgemein immer Ellipsen, da die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ und damit auch $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ immer positiv definit ist.

Aufgabe 60 [Randdichten der Multivariaten Normalverteilung]
Sei $\boldsymbol{X}$ eine $\text{MVN}_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$-Zufallsgrösse. Dabei sei

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir interessieren uns nun für die Dichte der ersten Komponente X_1 von $\boldsymbol{X}$. Es gilt

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \; = \eta + B\boldsymbol{X}, \quad \text{wobei } \eta = 0 \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit schliessen wir mit Satz 7.7 sofort, dass X_1 eine

$$\text{MVN}_1(\eta + B\mu, B\mathbf{\Sigma}B^t) \; = \text{MVN}_1\left(\mu_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \; = \mathcal{N}(\mu_1, 1)\text{-Verteilung}$$

hat. μ_1 ist dabei die erste Komponente von μ. Somit lautet eine Dichte f von X_1 wie folgt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}}.$$