Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

22. September 2012

Aufgabe 1 [Binomialkoeffizient]
Seien n und k zwei ganze Zahlen mit $0 \leqslant k \leqslant n$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

■

Beispiel

$$\binom{21}{18} = \binom{21}{3} = \frac{21\cdot 20\cdot 19}{3!} = 7\cdot 10\cdot 19 = 1330.$$

Aufgabe 2 [Binomialkoeffizient]
Seien n und k zwei ganze Zahlen mit $0 \leqslant k \leqslant n$.

a) BEHAUPTUNG: Es gilt: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \binom{n}{k} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} \\ &= \binom{n}{k}\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right) = \binom{n}{k}\cdot\frac{n+1}{k+1} = \frac{n!\cdot(n+1)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

■

b) BEHAUPTUNG: Es gilt: $n\binom{n+k}{k} = (k+1)\binom{n+k}{k+1}$.

Beweis:

$$n\binom{n+k}{k} = \frac{n(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+k)!}{k!(n-1)!} = \frac{(k+1)(n+k)!}{(k+1)!(n+k-(k+1))!} = (k+1)\binom{n+k}{k+1}.$$

■

Aufgabe 3
Wir nehmen zunächst an, dass die 8 Türme nicht unterscheidbar sind. Nun muss in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Turm stehen. Also gibt es in der ersten Zeile für den ersten Turm genau 8 mögliche Plätze. In der zweiten Zeile gibt es dann noch 7 Möglichkeiten für den zweiten Turm, da eine Spalte bereits belegt ist. usw.

Schlussendlich erhalten wir $8\cdot 7\cdots 2\cdot 1 = 8! = 40320$ Möglichkeiten.

Falls die Türme unterscheidbar sind, gibt es für jede der obigen Möglichkeiten noch 8! Permutationen. Also insgesamt $8!\cdot 8! = 1'625'702'400$ Möglichkeiten.

Aufgabe 4
In einer Gesellschaft von n Personen stösst jeder mit jedem genau einmal an. Dabei klirren 253 mal die Gläser, d.h. 253 ist genau die Anzahl Möglichkeiten 2 Personen aus n auszuwählen. Wir schliessen:

$$253 = \binom{n}{2} \overset{\text{Aufgabe 1}}{=} \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

Also

$$0 = n^2 - n - 506 = (n-23)(n+22).$$

Folglich gilt $n = 23$ (da $n = -22$ nicht möglich ist).

Aufgabe 5
Für jeden Schnittpunkt benötigen wir zwei Geraden. Folglich ist die Höchstzahl von Schnittpunkten bei 30 Geraden in derselben Ebene genau die Anzahl Möglichkeiten 2 Geraden aus 30 auszuwählen. Konkret ist das

$$\binom{30}{2} \overset{\text{Aufgabe 1}}{=} \frac{30 \cdot 29}{2!} = 15 \cdot 29 = 435.$$

Aufgabe 6
Nachdem wir die 4 Personen für das Boot mit 4 freien Plätzen ausgewählt haben, ist die Auswahl bereits komplett (da die anderen 5 dann ins andere Boot gehen müssen). Also müssen wir zählen, wieviele Möglichkeiten es gibt aus 9 Personen 4 auszuwählen:

$$\binom{9}{4} \overset{\text{Aufgabe 1}}{=} \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 = 126.$$

Das Resultat ist natürlich auch dasselbe, wenn wir das Boot mit 5 freien Plätzen zuerst belegen, siehe dazu Aufgabe 1.

Aufgabe 7 [Gegenwahrscheinlichkeiten!]
Für einen vierzigjährigen Mann betrage die Wahrscheinlichkeit 0.002, innert Jahresfrist zu sterben. An einer Klassenzusammenkunft sind 20 vierzigjährige Männer zusammen. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens einer im Laufe des darauffolgenden Jahres stirbt.

Wir berechnen dazu zuerst die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils, also dass alle 20 Männer überleben: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann überlebt beträgt (nach Lemma 1.3 a)) $1 - 0.002 = 0.998$, also beträgt die Wahrscheinlichkeit dass alle 20 Männer überleben:

$$0.998^{20}.$$

Somit lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeit (nach Lemma 1.3 a)):

$$1 - 0.998^{20} \doteq 0.039249.$$

Bemerkung: Wir haben hier einfach stillschweigend angenommen, dass die Ereignisse dass jeweils ein Mann innerhalb eines Jahres überlebt in der Gesamtheit unabhängig sind. Was eigentlich nicht ganz klar ist...