Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

23. September 2012

Aufgabe 8 [*P*]
Zur Modellierung eines fairen Würfels *wählen* wir für ein Elementarereignis $P[\{i\}] := 1/6$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $P[\{2, 3\}] = 1/3$ und $P[\Omega] = 1$, wobei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Beweis: Es gilt: $\{2, 3\} = \{2\} \cup \{3\}$, ausserdem ist dies eine disjunkte Vereinigung. Also gilt nach Definition 1.2 c):

$$P[\{2,3\}] \;=\; P[\{2\}] + P[\{3\}] \;=\; 1/6 + 1/6 \;=\; 1/3.$$

Weiter gilt: $\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$. Dies ist wiederum eine disjunkte Vereinigung. Also gilt aufgrund Definition 1.2 c):

$$P[\Omega] \;=\; P[\{1\}] + P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] + P[\{5\}] + P[\{6\}] \;=\; 6 \cdot 1/6 \;=\; 1.$$

Dies muss auch gemäss Definition 1.2 b) so sein! Sonst wäre unsere Wahl zur Modelierung schlecht gewählt gewesen!

■

Aufgabe 9 [*P*]
Ein Würfel sei verfälscht. Die Sechs, die Fünf und die Zwei sind alle gleich wahrscheinlich, nämlich doppelt so wahrscheinlich wie die Vier. Die restlichen Augenzahlen sind anderthalbmal so wahrscheinlich wie die Vier.

a) Für $i = 1, \ldots, 6$ setzen wir $p_i := P[\{i\}]$. Nun gilt nach obigem und nach Definition 1.2:

$$\begin{aligned} 2p_4 &= p_6 = p_5 = p_2 \\ 1.5p_4 &= p_1 = p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 &= 1. \end{aligned}$$

Durch einsetzen der ersten und der zweiten Zeile in die dritte, erhalten wir:

$$1 \;=\; p_4 + 3p_4 + 6p_4 \;=\; 10p_4.$$

Folglich gilt: $p_4 = 1/10$ und damit:

$$p_1 = p_3 = 3/20,\; p_4 = 1/10,\; p_2 = p_5 = p_6 = 1/5.$$

b) Es gilt:

$$P[\{i \in \Omega |\, i\,\text{Primzahl}\}] \;=\; P[\{2,3,5\}] \;=\; P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{5\}] \overset{\text{a)}}{=} 1/5 + 3/20 + 1/5 \;=\; 11/20.$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} P[\{i \in \Omega |\, i \geqslant 3\}] &\underset{1.3\text{ a)}}{\overset{\text{Lem}}{=}} 1 - P[\{i \in \Omega |\, i < 3\}] \;=\; 1 - P[\{1,2\}] \;=\; 1 - (P[\{1\}] + P[\{2\}]) \\ &\overset{\text{a)}}{=} 1 - (3/20 + 1/5) \;=\; 13/20. \end{aligned}$$

Aufgabe 10 [Ereignisse]
A,B,C seien drei Ereignisse. Nun gilt in Analogie zur Tabelle in 1.4.1:

Symbol	Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie
$A \cap B^c \cap C^c$	Nur A tritt ein.
$A \cap B \cap C$	Alle drei Ereignisse treten ein.
$A \cup B \cup C$	Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.
$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$	Genau eines der Ereignisse tritt ein.
$A^c \cup B^c \cup C^c$	Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

Aufgabe 11 [nützliche Eigenschaften von P (Lemma 1.3)]
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien weiter $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Sei $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine abzählbare Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$.

BEHAUPTUNG: Dann muss gelten: $P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} P[A_i]$.

Beweis: Wir definieren $B_1 := A_1$ und für eine natürliche Zahl $i \geqslant 2$:

$$B_i := A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c = A_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \subset A_i.$$

Nun gilt klar:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ und } B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ für } i \neq j.$$

Mit Definition 1.2 c) und mit c) folgt nun:

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \;=\; P[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i] \underset{1.2\text{ c)}}{\overset{\text{Def}}{=}} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P[B_i] \overset{\text{c)}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

■

b) BEHAUPTUNG: Falls $A \subset B$, dann gilt $P[B] = P[A] + P[B \setminus A]$.

Beweis: Falls $A \subset B$ gilt: $B = A \cup (B \setminus A)$. Ausserdem ist dies eine disjunkte Vereinigung. Also gilt nach Definition 1.2 c):

$$P[B] \;=\; P[A] + P[B \setminus A].$$

■

c) BEHAUPTUNG: Falls $A \subset B$, dann gilt: $P[A] \leqslant P[B]$.

Beweis: Falls $A \subset B$ gilt nach b):

$$P[B] \;=\; P[A] + P[B \setminus A] \;\geqslant\; P[A],$$

da nach Definition 1.2 a) $P[B \setminus A] \geqslant 0$ gilt.

■

d) BEHAUPTUNG: Es gilt: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

Beweis: Offenbar gilt $A \subset A \cup B$ und $B \cap A^c \subset B$. Damit folgt mit b):

$$P[A \cup B] \overset{\text{b)}}{=} P[A] + P[(A \cup B) \setminus A] \;=\; P[A] + P[B \cap A^c] \overset{\text{b)}}{=} P[A] + P[B] - P[B \setminus (B \cap A^c)].$$

Weiter gilt:

$$B \setminus (B \cap A^c) \;=\; B \cap (B \cap A^c)^c \;=\; B \cap (B^c \cup A) \;=\; A \cap B,$$

womit die Behauptung sofort folgt.

■

Aufgabe 12
A, B, C seien drei Ereignisse.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $P[A\cup B\cup C] = P[A]+P[B]+P[C]-P[A\cap B]-P[B\cap C]-P[A\cap C]+P[A\cap B\cap C]$.

Beweis: Nach Aufgabe 11 d) gilt:

$$\begin{aligned} P[A\cup B\cup C] &\overset{11\ d)}{=} P[A]+P[B\cup C]-P[A\cap(B\cup C)] \\ &\overset{11\ d)}{=} P[A]+P[B]+P[C]-P[B\cap C]-P[A\cap(B\cup C)] \\ &\underset{\text{tivität}}{\overset{\text{Distribu-}}{=}} P[A]+P[B]+P[C]-P[B\cap C]-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)] \\ &\overset{11\ d)}{=} P[A]+P[B]+P[C]-P[A\cap B]-P[B\cap C]-P[A\cap C]+P[A\cap B\cap C]. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 13
E und F seien zwei Ereignisse, so dass gilt: $P[E\cap F] = P[E]P[F]$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $P[E^c\cap F^c] = P[E^c]P[F^c]$. Dies bedeutet: falls zwei Ereignisse unabhängig sind, dann sind ihre komplementären Ereignisse auch unabhängig.

Beweis: Nach den de Morganschen Gesetzen gilt: $E^c\cap F^c = (E\cup F)^c$. Wir schliessen mit Lemma 1.3 a) und Aufgabe 11 d):

$$\begin{aligned} P[E^c\cap F^c] &= P[(E\cup F)^c] \underset{1.3\ a)}{\overset{\text{Lem}}{=}} 1-P[E\cup F] \overset{11\ d)}{=} 1-P[E]-P[F]+P[E\cap F] \\ &= 1-P[E]-P[F]+P[E]P[F] = (1-P[E])(1-P[F]) \underset{1.3\ a)}{\overset{\text{Lem}}{=}} P[E^c]P[F^c]. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 14
Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei n (unabhängigen) Würfen eines unverfälschten Würfels niemals eine 6 würfelt lautet $(1-1/6)^n = (5/6)^n$.

a) Damit die Wahrscheinlichkeit bei n (unabhängigen) Würfen eines unverfälschten Würfels niemals eine 6 zu würfeln mindestens 5% beträgt, muss also gelten:

$$(5/6)^n \geqslant 0.05 \;\Leftrightarrow\; n \leqslant \frac{\log(0.05)}{\log(5/6)} \doteq 16.431,$$

d.h. in diesem Fall ist n höchstens 16.

b) Damit die Wahrscheinlichkeit bei n (unabhängigen) Würfen eines unverfälschten Würfels niemals eine 6 zu würfeln mindestens 0.1% beträgt, muss also gelten:

$$(5/6)^n \geqslant 0.001 \;\Leftrightarrow\; n \leqslant \frac{\log(0.001)}{\log(5/6)} \doteq 37.888,$$

d.h. in diesem Fall ist n höchstens 37.

Aufgabe 15 [3. Eigenschaft der Wahrscheinlichkeit P, Variante "light"]
$(A_n)_{n=1}^k$ seien paarweise disjunkte Ereignisse, $k\in\mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass für zwei disjunkte Ereignisse A,B gilt:

$$P[A\cup B] = P[A]+P[B]. \tag{$*$}$$

BEHAUPTUNG: Dann gilt auch $P[\bigcup_{n=1}^k A_n] = \sum\limits_{n=1}^{k} P[A_n]$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage per Induktion:

Falls $k = 1$ ist die Aussage offensichtlich und für $k = 2$ ist die Behauptung genau die Aussage von $(*)$.
Nehmen wir also an, dass $k \geqslant 3$ und die Behauptung sei für $k-1$ statt k bewiesen, d.h. es gelte:

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right] = \sum_{n=1}^{k-1} A_n. \tag{$**$}$$

Somit folgt:

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right] = P\left[A_k \cup \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right] \stackrel{(*)}{=} P[A_k] + P\left[\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right] \stackrel{(**)}{=} P[A_k] + \sum_{n=1}^{k-1} P[A_n] = \sum_{n=1}^{k} P[A_n].$$

■