Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

2. Oktober 2012

Aufgabe 16 [Unabhängigkeit von Ereignissen]
Zwei Ereignisse A, B seien derart, dass $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, d.h. die Ereignisse A und B seien unabhängig voneinander.

BEHAUPTUNG: A^c und B sind auch unabhängig, d.h. $P[A^c \cap B] = P[A^c]P[B]$.

Beweis: Nach Lemma 1.3 gilt:

$$P[A^c \cap B] = P[B \setminus (A \cap B)] \underset{1.3\text{ c)}}{\overset{\text{Lem}}{=}} P[B] - P[A \cap B] \overset{\text{II}}{=} P[B] - P[A]P[B] = (1 - P[A])P[B] \underset{1.3\text{ a)}}{\overset{\text{Lem}}{=}} P[A^c]P[B].$$

■

BEMERKUNG: Natürlich folgt aus Symmetriegründen, dass unter denselben Voraussetzungen A und B^c voneinander unabhängig sind.

Aufgabe 17 [Unabhängigkeit von Ereignissen]
Von den 240 HörerInnen einer Vorlesung studieren 127 Biologie, 66 Geographie und 47 andere Fächer. Eine Person p wird zufällig ausgewählt.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass diese Person p Biologie studiert und ein Sonntagskind ist.

Um dies zu tun, machen wir die folgenden zwei Annahmen: Erstens nehmen wir an, dass das Ereignis "p studiert Biologie"$(=: B)$ unabhängig vom Ereignis "p ist ein Sonntagskind"$(=: S)$ ist. Zweitens nehmen wir an, dass alle Wochentage als Geburtstag gleich wahrscheinlich sind.

Nun erhalten wir:

$$P[B \cap S] \underset{\text{hängig}}{\overset{\text{unab-}}{=}} P[B]P[S] = \frac{127}{240} \cdot \frac{1}{7} = \frac{127}{1680} \doteq 0.075595.$$

Aufgabe 18 [bedingte Wahrscheinlichkeiten]
A, B und C seien 3 Ereignisse mit $P[A] > 0$ und $P[A \cap B] > 0$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B|A]P[C|A \cap B]$.

Beweis: Durch Einsetzen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (Definition 1.5) erhalten wir:

$$P[A \cap B \cap C] \underset{1.5}{\overset{\text{Def}}{=}} P[A \cap B]P[C|A \cap B] \underset{1.5}{\overset{\text{Def}}{=}} P[A]P[B|A]P[C|A \cap B].$$

■

BEHAUPTUNG: Wir können die obige Formel wie folgt verallgemeinern: Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Ereignisse, derart dass $P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}] > 0$. Dann gilt:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right] = \prod_{i=1}^n P\left[A_i \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right].$$

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass mit Lemma 1.3 d) sofort folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n-1$ gilt:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^k A_j\right] \geqslant P\left[\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right] > 0.$$

Somit macht die Gleichung in der Behauptung Sinn.

Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Also können wir annehmen, dass $n \geqslant 2$. Wir machen eine Induktion und nehmen daher an, dass gilt:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n-1} P\left[A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right]. \qquad (*)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] &= P\left[A_n \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] \overset{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} P\left[A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] \cdot P\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] \\ &\overset{(*)}{=} P\left[A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] \cdot \prod_{i=1}^{n-1} P\left[A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right] = \prod_{i=1}^{n} P\left[A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right]. \end{aligned}$$

■

Bemerkung: Ein entsprechender Wahrscheinlichkeitsbaum liefert genau dieselbe Formel. Siehe dazu Mittelschule (Gymnasium).

Aufgabe 19 [bedingte Wahrscheinlichkeiten]
Aus der Menge der Zahlen $\{31, 32, \ldots, 50\}$ wird eine Zahl zufällig ausgewählt. Wir betrachten die folgenden Ereignisse: A: "die Zahl ist ungerade", B: "die Zahl ist durch 7 teilbar", C: "die Zahl ist eine Primzahl".

a) Es gilt:

$$P[A|B] \overset{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\{35, 49\}]}{P[\{35, 42, 49\}]} = \frac{2/20}{3/20} = \frac{2}{3} \doteq 0.66667.$$

b) Es gilt:

$$P[B|A^c] \overset{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} \frac{P[B \cap A^c]}{P[A^c]} = \frac{P[\{42\}]}{P[\{32, 34, 36, 38, \ldots, 50\}]} = \frac{1/20}{1/2} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

c) Es gilt:

$$P[C|A] \overset{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} \frac{P[C \cap A]}{P[A]} = \frac{P[\{31, 37, 41, 43, 47\}]}{P[\{31, 33, 35, \ldots, 49\}]} = \frac{5/20}{1/2} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

d) Es gilt:

$$P[A|C] \overset{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{P[\{31, 37, 41, 43, 47\}]}{P[\{31, 37, 41, 43, 47\}]} = 1.$$

Dieses Resultat ist in einem gewissen Sinn speziell, da $A \supset C$. Denn damit folgt schon: $P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{P[C]}{P[C]} = 1$.

Aufgabe 20 [FTW]
An einer Hochschule findet eine schriftliche Prüfung statt. Nur die Hälfte der Prüflinge beachten dabei die Lösungshinweise. Nach der Korrektur werden die Geprüften in vier Kategorien eingeteilt: I: sehr gut; II: gut; III: genügend; IV: ungenügend. Es sind $1/8$ der Personen in Gruppe I, $1/8$ in Gruppe II, $1/2$ in Gruppe III und $1/4$ in Gruppe IV. Von den Personen, die die Lösungshinweise nicht beachtet haben, sind $1/10$ der Personen in Gruppe I, $1/5$ in Gruppe II, $2/5$ in Gruppe III und $3/10$ in Gruppe IV. Eine Person wird nun zufällig ausgewählt.

Wir führen nun 5 Ereignisse ein: ($f = \text{I, II, III, IV}$)

$$A := \{\text{Die Person hat die Lösungshinweise beachtet}\}, \; G_f := \{\text{Die Person ist in Gruppe } f\}.$$

Obige Angaben liefern uns nun (unter Anderem): $P[A] = 1/2$, $P[G_{\text{II}}] = 1/8$ und $P[G_{\text{II}}|A^c] = 1/5$.

Mit Lemma 1.3 a) schliessen wir gleich noch: $P[A^c] = 1 - P[A] = 1/2$.

a) Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass diese Person in Kategorie II klassiert ist, wenn sie angibt, die Lösungshinweise beachtet zu haben. Dazu bemerken wir, dass $A \cup A^c = \Omega$ eine Partition ist. Damit folgt mit Lemma 1.7 (FTW): $P[G_{\text{II}}] = P[G_{\text{II}}|A]P[A] + P[G_{\text{II}}|A^c]P[A^c]$. Wir schliessen:

$$P[G_{\text{II}}|A] = \frac{P[G_{\text{II}}] - P[G_{\text{II}}|A^c]P[A^c]}{P[A]} = \frac{1/8 - 1/5 \cdot 1/2}{1/2} = \frac{1}{20} = 0.05.$$

b) Nun wollen wir noch die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Person die Lösungshinweise beachtet hat, wenn sie in Kategorie II klassiert ist. Dazu nutzen wir die Formel von Bayes (siehe 1.4.7):

$$P[A|G_{\text{II}}] = \frac{P[G_{\text{II}}|A]P[A]}{P[G_{\text{II}}|A]P[A] + P[G_{\text{II}}|A^c]P[A^c]} \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1/20 \cdot 1/2}{1/20 \cdot 1/2 + 1/5 \cdot 1/2} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Aufgabe 21 [FTW mit bedingten Wahrscheinlichkeiten: bFTW]
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $B_1, B_2, \ldots$ eine Partition (bestehend aus Ereignissen) von Ω (d.h. die B_i's sind disjunkt und $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$). Weiter haben wir ein Ereignis $C \subset \Omega$ und es gelte für alle $i \geqslant 1$: $P[C \cap B_i] > 0$.

Behauptung: Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i]P[B_i|C].$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P[C]P[A|C] &\stackrel{\text{Def}}{\underset{1.5}{=}} P[A \cap C] = P[A \cap C \cap \Omega] = P\left[A \cap C \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] \stackrel{\text{Distribu-}}{\underset{\text{tivität}}{=}} P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(C \cap B_i \cap A)\right] \\ &\stackrel{\text{Def}}{\underset{1.2c)}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} P[C \cap B_i \cap A] \stackrel{\text{Aufg.}}{\underset{18}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} P[C]P[B_i|C]P[A|C \cap B_i] \\ &= P[C] \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i]P[B_i|C]. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung sofort, da $P[C] \geqslant P[C \cap B_1] > 0$.

■

Aufgabe 22 [Lemma 1.8, 2. Teil]
Es sei $B_1, B_2, \ldots$ eine absteigende Folge von Ereignissen, d.h. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$. Wir definieren in dem Fall:

$$B := \lim_{i \to \infty} B_i := \bigcap_{i \geqslant 1} B_i.$$

Behauptung: In dieser Situation gilt: $P[B] = \lim_{i \to \infty} P[B_i]$.

Beweis: Da $B_1, B_2, \ldots$ eine absteigende Folge ist, ist $B_1^c, B_2^c, \ldots$ eine aufsteigende Folge. Damit können wir im Folgenden den ersten Teil von Lemma 1.8 auf diese aufsteigende Folge anwenden:

$$\begin{aligned} P[B] &= P\left[\bigcap_{i \geqslant 1} B_i\right] \stackrel{\text{Lem}}{\underset{1.3\text{ a)}}{=}} 1 - P\left[\left(\bigcap_{i \geqslant 1} B_i\right)^c\right] \stackrel{\text{de}}{\underset{\text{Morgan}}{=}} 1 - P\left[\bigcup_{i \geqslant 1} B_i^c\right] \stackrel{\text{Lem}}{\underset{1.8}{=}} 1 - \lim_{i \to \infty} P[B_i^c] \\ &= \lim_{i \to \infty}(1 - P[B_i^c]) \stackrel{\text{Lem}}{\underset{1.3\text{a)}}{=}} \lim_{i \to \infty} P[B_i]. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 23 [Ereignisse, ohne Bezug zu *P*]
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \begin{cases} \{1\}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \emptyset, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun gilt:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i \geqslant n} A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \emptyset = \emptyset \text{ und } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geqslant n} A_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{1\} = \{1\} \neq \emptyset.$$