Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

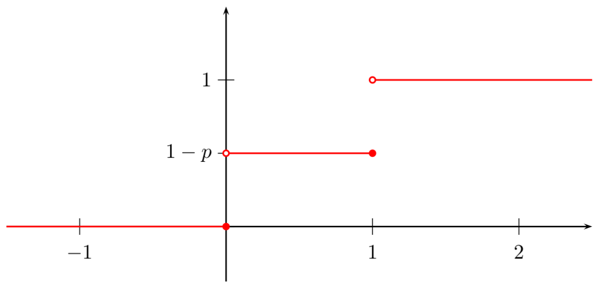
Olivier Warin

19. Oktober 2012

Aufgabe 24 [Verteilungsfunktion]
Es sei X eine Be(p)-Zufallsgrösse ($p \in [0,1]$). Falls man die Verteilungsfunktion von X als

$$F(a) := P[X < a]$$

definieren würde, würde der Graph von F in etwa so aussehen:



Aufgabe 25 [Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeit]
Sei Z eine $U[4,6]$-Zufallsgrösse. Sei f die Dichtefunktion von Z, nach Vorlesung gilt also ($a \in \mathbb{R}$):

$$f(a) = \begin{cases} (6-4)^{-1} = 1/2, & \text{falls } a \in [4,6] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P[Z \in [5.5, 7]] &= \int_{5.5}^{7} f(x)dx = \int_{5.5}^{6} 1/2 dx = 1/4 = 0.25 \\
P[Z^2 \in [20, 35]] &= P[Z \in [\sqrt{20}, \sqrt{35}] \text{ oder } Z \in [-\sqrt{35}, -\sqrt{20}]] \\
&\overset{\text{disjunkt}}{=} P[Z \in [\sqrt{20}, \sqrt{35}]] + P[Z \in [-\sqrt{35}, -\sqrt{20}]] \\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\sqrt{35}} f(x)dx + \int_{-\sqrt{35}}^{-\sqrt{20}} f(x)dx \\
&= \int_{\sqrt{20}}^{\sqrt{35}} \frac{1}{2} dx \\
&= 1/2(\sqrt{35} - \sqrt{20}) \doteq 0.7219719.
\end{aligned}$$

Aufgabe 26 [Ist das eine Dichte?]
Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ($x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEHAUPTUNG: f ist eine Dichte einer stetigen Zufallsgrösse.

Beweis: f ist klar eine nichtnegative und integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Ausserdem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; \int_0^1 2xdx \;=\; [x^2]_{x=0}^{x=1} \;=\; 1.$$

Nach Definition 2.4 ist f damit eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse.

$\blacksquare$

Wir bezeichnen nun mit X eine stetige Zufallsgrösse mit Dichtefunktion f. Es sei F die Verteilungsfunktion von X. Wir schliessen ($a \in \mathbb{R}$):

$$F(a) \;=\; P[X \leqslant a] \;=\; \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ a^2, & \text{falls } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 1, & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Weiter gilt:

$$P[X \in [0.5, 0.8]] \;=\; F(0.8) - F(0.5) \;=\; 0.39.$$

Aufgabe 27 [Verteilungsfunktion]

a) X sei exponentialverteilt; d.h. die Dichte von X sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geqslant 0$ und gleich 0 sonst. λ ist dabei ein reeller Parameter echt grösser Null. Sei weiter F_X die Verteilungsfunktion von X, nun gilt ($a \in \mathbb{R}$):

$$F_X(a) \;=\; P[X \leqslant a] \;=\; \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ 1 - e^{-\lambda a}, & \text{falls } a \geqslant 0. \end{cases}$$

b) Die Exponentialverteilung kann dazu benutzt werden Atomzerfall zu modellieren. Mit den Bezeichnungen aus a) gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom im Intervall $[2, 3]$ zerfällt ist gegeben durch:

$$P[X \in [2, 3]] \;=\; F_X(3) - F_X(2) \overset{\text{a)}}{=} e^{-2\lambda} - e^{-3\lambda}.$$

Mit $\lambda = 1$ oder $\lambda = 10$ schliessen wir:

$$P[X \in [2, 3]] \;=\; \begin{cases} e^{-2} - e^{-3} \;\doteq\; 0.085548, & \text{falls } \lambda = 1 \\ e^{-20} - e^{-30} \;\doteq\; 2.06106 \cdot 10^{-9}, & \text{falls } \lambda = 10. \end{cases}$$

λ ist die sogenannte Zerfallsrate. Bei $\lambda = 10$ zerfällt ein Atom aufgrund der hohen Zerfallsrate meistens bereits vor dem Zeitpunkt 2, also wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom während $[2, 3]$ zerfällt, entsprechend kleiner.

Nach Lemma 1.3 a) gilt: $1 - F_X(a) = 1 - P[X \leqslant a] = P[X > a]$. Also steht der Ausdruck $1 - F_X(a)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt a ein bestimmtes Atom *nicht* zerfallen ist.

Aufgabe 28 [Sind das Verteilungen?]

a) Es sei $p \in (0, 1)$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $\sum_{k \geqslant 1} p(1-p)^{k-1} \;=\; 1.$

Beweis: Es gilt:

$$\sum_{k \geqslant 1} p(1-p)^{k-1} \;=\; p \sum_{k \geqslant 1} (1-p)^{k-1} \;=\; p \sum_{\ell \geqslant 0} (1-p)^{\ell} \overset{\text{geom.}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} \frac{p}{1-(1-p)} \;=\; 1.$$

$\blacksquare$

b) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1.$

Beweis: Es gilt:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \;=\; \lim_{y \to \infty} \int_0^{y} \lambda e^{-\lambda x} dx \;=\; \lim_{y \to \infty} [-e^{-\lambda x}]_{x=0}^{x=y} \;=\; \lim_{y \to \infty} (1 - e^{-\lambda y}) \overset{\lambda \geq 0}{=} 1.$$

■

c) Es seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1$.

Beweis: Wir führen die folgende Substitution durch: $t := \frac{x-\mu}{\sigma}$ ($\Rightarrow dx = \sigma dt$). Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1.$$

■

Aufgabe 29 [Messbarkeit]

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und P die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\mathcal{A}$. Weiter definieren wir $X : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega = \omega_1 \\ -1, & \text{falls } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Nun gilt: $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant 0\} = \{\omega_2\} \notin \mathcal{A}$. Also ist X nicht messbar, also keine Zufallsgrösse.

Aufgabe 30 [Harmonische Reihe und Konsorten I]

a) Sei X eine stetige Zufallsgrösse auf dem reellen Intervall $[1, \infty)$. Die Dichte sei von der Art

$$K_1(\alpha)\frac{1}{x^\alpha}.$$

Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_1(\alpha)$ eine *Normierungskonstante*.

BEHAUPTUNG: Damit es sich hier wirklich um eine Dichte handelt muss gelten: $\alpha > 1$ und $K(\alpha) = \alpha - 1$.

Beweis: Falls $\alpha = 1$ gilt:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{y \to \infty} \int_1^y \frac{1}{x} dx = \lim_{y \to \infty} \log y = \infty.$$

Also ist dieser Fall unmöglich, da wir dieses Integral nicht auf 1 normieren können.

Falls $\alpha \neq 1$ gilt:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{y \to \infty} \int_1^y x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{y \to \infty} y^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung sofort.

■

b) Sei X eine stetige Zufallsgrösse auf dem reellen Intervall $(0, 1)$. Die Dichte sei von der Art

$$K_2(\alpha)\frac{1}{x^\alpha}.$$

Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_2(\alpha)$ eine *Normierungskonstante*.

BEHAUPTUNG: Damit es sich hier wirklich um eine Dichte handelt muss gelten: $\alpha < 1$ und $K_2(\alpha) = 1 - \alpha$.

Beweis: Falls $\alpha = 1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{y \downarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{y \downarrow 0}(-\log y) = \infty.$$

Also ist dieser Fall unmöglich, da wir dieses Integral nicht auf 1 normieren können.

Falls $\alpha \neq 1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{y \downarrow 0} \int_y^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim_{y \downarrow 0} y^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{falls } \alpha < 1 \\ \infty, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung sofort.

$\blacksquare$

c) Sei X eine diskrete Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen (ohne die Null). Die Wahrscheinlichkeitsfunktion sei dabei von der Art
$$K_3(\alpha)\frac{1}{n^\alpha}.$$
Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_3(\alpha)$ eine *Normierungskonstante.*

BEHAUPTUNG: Damit es sich hier wirklich um eine Wahrscheinlichkeitsfunktion handelt muss gelten: $\alpha > 1$.

Beweis: Mit dem Beweis von a) und dem Integralkriterium folgt sofort:
$$\text{Die Reihe } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert genau dann, wenn } \alpha > 1.$$
Also ist diese Reihe genau dann auf 1 normierbar, wenn $\alpha > 1$. Dies bedeutet, dass $K_3(\alpha)\frac{1}{n^\alpha}$ genau dann eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist, wenn $\alpha > 1$.

$\blacksquare$

Aufgabe 31 [Unabhängigkeit von Zufallsgrössen]
Seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $P[\{\omega_1\}] = P[\{\omega_2\}] = 1/2$.

Wir definieren weiter $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega_1) = -1$, $X(\omega_2) = 1$, $Y(\omega_1) = 0$ und $Y(\omega_2) = 2$.
Da $Y = X + 1$ gilt klar $X \not\perp\!\!\!\perp Y$. Konkret gilt:
$$P[X \in (0,2), Y \in (1,3)] = P[\{\omega_2\}] = 1/2 \neq 1/4 = P[\{\omega_2\}]P[\{\omega_2\}] = P[X \in (0,2)]P[Y \in (1,3)].$$
Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $X(\omega)^2 = 1$, folgt:
$$P[X^2 \in A, Y \in B] = \begin{cases} P[Y \in B], & \text{falls } 1 \in A \\ 0, & \text{falls } 1 \notin A. \end{cases}$$
Weiter gilt:
$$P[X^2 \in A] \cdot P[Y \in B] = \begin{cases} P[Y \in B], & \text{falls } 1 \in A \\ 0, & \text{falls } 1 \notin A. \end{cases}$$
Wir schliessen: $P[X^2 \in A, Y \in B] = P[X^2 \in A]P[Y \in B]$, also gilt: $X^2 \perp\!\!\!\perp Y$.