Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

31. Oktober 2012

Aufgabe 32 [Bivariate Verteilung]

a) X und Y seien unabhängig von einander und beide $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. $F_{X,Y}$ sei die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y. Nun gilt:

$$F_{X,Y}(0,0) \underset{2.5}{\overset{\text{Def}}{=}} P[X \leqslant 0,\, Y \leqslant 0] \overset{\text{II}}{=} P[X \leqslant 0]P[Y \leqslant 0] \;=\; {}^1\!/\!_2 \cdot {}^1\!/\!_2 \;=\; {}^1\!/\!_4.$$

b) Sei jetzt X wieder $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Weiter sei Y definiert durch $Y(\omega) = -X(\omega)\ \forall\omega \in \Omega$. Nun gilt:

$$F_{X,Y}(0,0) \underset{2.5}{\overset{\text{Def}}{=}} P[X \leqslant 0,\, Y \leqslant 0] \;=\; P[X \leqslant 0,\, -X \leqslant 0] \;=\; P[X \leqslant 0,\, X \geqslant 0] \;=\; P[X = 0] \;=\; 0.$$

Aufgabe 33 [Bivariate Verteilung, Unabhängigkeit]

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y zwei Zufallsgrössen, definiert durch $X(\omega) = Y(\omega) = \frac{5}{2}\ \forall\omega \in \Omega$.

X und Y haben klar dieselbe Verteilung (da $X = Y$) und es gilt:

$$P[X + Y = 5] \;=\; P[\Omega] \;=\; 1.$$

b) Seien X, Y zwei Zufallsgrössen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Es gelte

$$P[X = a] \;=\; P[Y = b] \;=\; 1$$

für zwei reelle Zahlen a, b.

Behauptung: X und Y sind unabhängig.

Beweis: Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Falls $a \notin A$ gilt:

$$P[X \in A,\, Y \in B] \;\leqslant\; P[X \in A] \;\leqslant\; P[X \neq a] \;=\; 1 - P[X = a] \;=\; 0,$$

also gilt in diesem Fall $P[X \in A,\, Y \in B] = 0$. Analog folgt, dass falls $b \notin B$ gilt: $P[X \in A, Y \in B] = 0$.

Falls $a \in A$ und $b \in B$ folgt: $P[X \in A] \geqslant P[X = a] = 1$, also $P[X \in A] = 1$ und analog $P[Y \in B] = 1$. Folglich gilt

$$P[X \in A,\, Y \in B] \underset{1.3\text{ e)}}{\overset{\text{Lem}}{=}} \underbrace{P[X \in A]}_{=1} + \underbrace{P[Y \in B]}_{=1} - P[X \in A \text{ oder } Y \in B] \underset{1.2\text{ a)}}{\overset{\text{Def}}{\geqslant}} 1$$

und damit $P[X \in A,\, Y \in B] = 1$.

Wir schliessen:

$$P[X \in A,\, Y \in B] \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \text{ und } b \in B \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter gilt:

$$P[X \in A]P[Y \in B] \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A \text{ und } b \in B \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt: $P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A]P[Y \in B]$, d.h. X und Y sind unabhängig.

■

Aufgabe 34 [Transformation von Zufallsgrössen]
X sei eine standardnormalverteilte Zufallsgrösse, d.h. X hat als Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \ (x \in \mathbb{R}).$$

Wir wollen nun eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X^2 bestimmen. Dazu bestimmen wir zuerst die Verteilungsfunktion (=: G) von X^2:

$$G(a) \underset{2.2}{\overset{\text{Def}}{=}} P[X^2 \leqslant a].$$

Falls $a < 0$ folgt sofort: $G(a) = 0$ und falls $a \geqslant 0$ folgt:

$$\begin{aligned} G(a) &= P[-\sqrt{a} \leqslant X \leqslant \sqrt{a}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-t^2/2} dt \underset{\text{trie}}{\overset{\text{Symme-}}{=}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2/2} dt \\ &\overset{x=t^2}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} dx. \end{aligned}$$

Nun definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Nach Obigem gilt nun $G(a) = \int_{-\infty}^{a} g(x)dx$, also ist g eine Wahrscheinlichkeitsdichte von X^2.

Aufgabe 35 [max von Uniform]
$X_1, \ldots, X_n$ seien iid $U[0,1]$-Zufallsgrössen. Wir definieren $M := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Sei weiter F_M die Verteilungsfunktion von M. Nun gilt:

$$F_M(a) \underset{2.2}{\overset{\text{Def}}{=}} P[M \leqslant a] = P[X_1 \leqslant a, \ldots, X_n \leqslant a] \overset{\text{II}}{=} P[X_1 \leqslant a] \cdots P[X_n \leqslant a] = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ a^n, & \text{falls } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 1, & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Wir schliessen: Eine Dichte f_M von M lautet:

$$f_M(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

denn nach Obigem gilt: $F_M(a) = \int_{-\infty}^{a} f_M(x)dx$.

Aufgabe 36 [Stetige Zufallsgrösse, Integralrechnung]
Sei $c \in \mathbb{R}$ so dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} c(x+2)^{-2}, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

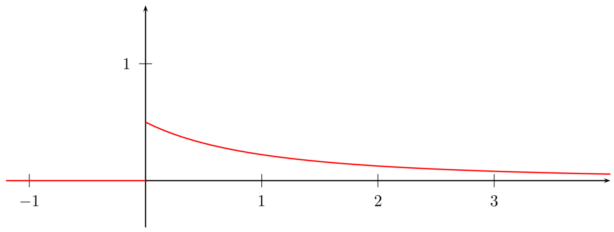
eine Dichtefunktion einer Zufallsgrösse Y ist.

a) Es muss also gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c \int_0^{\infty} (x+2)^{-2} dx = \frac{c}{2}.$$

Wir schliessen: $c = 2$.

Hier eine Skizze des Graphen von f:



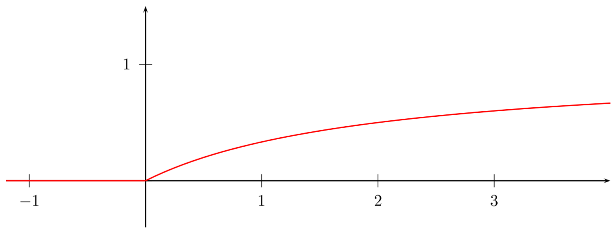
b) Es sei F die Verteilungsfunktion von f. Nun gilt (für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$):

$$F(a) \overset{\text{Def}}{\underset{2.4}{=}} \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = c\int_0^a \frac{1}{(x+2)^2}dx = \frac{c}{2} - \frac{c}{a+2} \overset{\text{a)}}{=} \frac{a}{a+2}.$$

Weiter gilt für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant 0$ klar: $F(a) = 0$. Wir erhalten also

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \leqslant 0 \\ \frac{a}{a+2}, & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Hier noch eine Skizze vom Graphen von F:



c) Sei m der Median von Y. Es gilt also

$$1/2 = P[Y \leqslant m] = F(m) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow m = 2.$$

Aufgabe 37 [Summe von Zufallsgrössen]

a) Seien X und Y iid Zufallsgrössen, welche auf den natürlichen Zahlen $\{1, \dots, n\}$, $n \geqslant 2$ uniform verteilt sind (d.h. $P[X = i] = 1/n$; $1 \leqslant i \leqslant n$).

Behauptung: Falls $n > 1$, ist $X + Y$ auf den natürlichen Zahlen $\{2, \dots, 2n\}$ *nicht* uniform verteilt.

Beweis: Wir nehmen an, dass $n > 1$ gilt. Wäre nun $X + Y$ auf den natürlichen Zahlen $\{2, \dots, 2n\}$ uniform verteilt, müsste gelten:

$$P[X + Y = i] = \frac{1}{2n-1}, \text{ für alle } i = 2, \dots, 2n.$$

Nun gilt:

$$P[X + Y = 2] = P[X = 1, Y = 1] \overset{\text{iid}}{=} P[X = 1]P[X = 1] = \frac{1}{n^2}.$$

Wir schliessen:

$$n^2 = 2n - 1 \Rightarrow 1 = n > 1.$$

Was natürlich ein Widerspruch ist. Dies bedeutet: $X + Y$ ist nicht uniform verteilt.

■

Bemerkung: Für $n = 1$ ist $X + Y$ trivialerweise uniform verteilt.

b) Seien X und Y iid $U[0, 1]$-Zufallsgrössen.

Behauptung: $X + Y$ ist keine $U[0, 2]$-Zufallsgrösse.

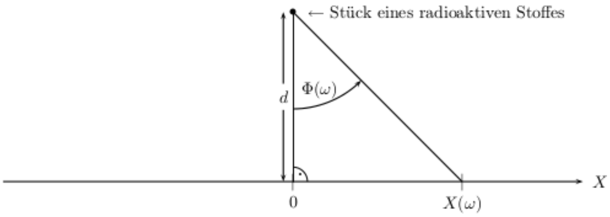
Beweis: Es gilt:

$$1/16 = P[X \leqslant 1/4]P[Y \leqslant 1/4] \overset{\text{iid}}{=} P[X \leqslant 1/4, Y \leqslant 1/4] \underset{1.3\text{ d)}}{\overset{\text{Lem}}{\geqslant}} P[X+Y \leqslant 1/4].$$

Wäre nun $X+Y$ eine $U[0,2]$-Zufallsgrösse müsste gelten: $P[X+Y \leqslant 1/4] = 1/8$. Wir haben aber gerade gezeigt, dass gilt $P[X+Y \leqslant 1/4] \leqslant 1/16 < 1/8$, folglich kann $X+Y$ keine $U[0,2]$-Zufallsgrösse sein.

■

Aufgabe 38 [Cauchy-Verteilung]
Ein Stück eines radioaktiven Stoffes wirft Partikel in zufällige Richtungen aus, wobei keine Richtung bevorzugt wird. Das Stück wird in einer Entfernung von d Metern gegenüber einer unendlich ausgedehnten photographischen Platte aufgestellt. Die waagrechte Koordinate X eines auf der Platte auftreffenden Partikels ist dann eine Zufallsgrösse. Sei weiter $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ der Winkel, wie in der folgenden Skizze (der Draufsicht) angedeutet:



Da die Platte nur für $\Phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ trifft, nehmen wir gleich an, dass dies immer der Fall ist (Sonst ist X gar nicht definiert). Genauer verkleinern wir Ω entsprechend. Aus Symmetriegründen, können wir also annehmen, dass gilt $\Phi \sim U[-\pi/2, \pi/2]$.

Ein wenig Trigonometrie liefert: $X = d\tan(\Phi)$. Es folgt (mit $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$):

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P[X \leqslant a] = P[d\tan(\Phi) \leqslant a] = P[\Phi \leqslant \arctan(a/d)] = \frac{\arctan(a/d) + \pi/2}{\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{a} \frac{d}{\pi(x^2+d^2)} dx. \end{aligned}$$

Also lautet eine Dichte f_X von X, wie folgt: $f_X(x) = \frac{d}{\pi(x^2+d^2)}$.