Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

7. November 2012

Aufgabe 39 [Berechnung von Erwartungswerten, diskret]
X sei eine Zufallsgrösse mit folgender Verteilung:

$$P[X=8] = 1/8;\ P[X=12] = 1/6;\ P[X=16] = 3/8;\ P[X=20] = 1/4;\ P[X=24] = 1/12.$$

a) Nach Definition 3.1 gilt:

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P[X = x_i] = 8 \cdot 1/8 + 12 \cdot 1/6 + 16 \cdot 3/8 + 20 \cdot 1/4 + 24 \cdot 1/12 = 16.$$

b) Wiederum nach Definition 3.1 gilt:

$$E[X^2] = \sum_{x_i} x_i^2 P[X = x_i] = 8^2 \cdot 1/8 + 12^2 \cdot 1/6 + 16^2 \cdot 3/8 + 20^2 \cdot 1/4 + 24^2 \cdot 1/12 = 276.$$

c) Mit Definition 3.2 und Lemma 3.7 b) schliessen wir:

$$E[(X - E[X])^2] \underset{3.2}{\overset{\text{Def}}{=}} V[X] \underset{3.7\text{ b)}}{\overset{\text{Lem}}{=}} E[X^2] - (E[X])^2 \underset{\text{b)}}{\overset{\text{a)}}{=}} 276 - 16^2 = 20.$$

Aufgabe 40 [Berechnung von Erwartungswerten, stetig]
Eine stetige Zufallsgrösse X nehme nur Werte auf dem Intervall $[1, 2]$ an. Die Dichte sei dort

$$f(x) = K(x^2 + x),$$

mit einer Normierungskonstanten K.

a) Da f eine Dichte ist, muss gelten:

$$1 = \int_1^2 K(x^2+x)dx = K\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{23K}{6} \Rightarrow K = \frac{6}{23}.$$

b) Nach Definition 3.1 gilt:

$$E[X] = \int_1^2 xf(x)dx \overset{\text{a)}}{=} \frac{6}{23}\int_1^2 (x^3+x^2)dx = \frac{6}{23}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{6}{23} \cdot \frac{73}{12} = \frac{73}{46}$$

c) Mit Lemma 3.7 b) und Definition 3.1 schliessen wir:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \overset{\text{b)}}{=} \int_1^2 x^2 f(x)dx - \left(\frac{73}{46}\right)^2 \overset{\text{a)}}{=} \frac{6}{23}\int_1^2 (x^4+x^3)dx - \frac{5329}{2116} = \frac{817}{10580}$$

d) Nun berechnen wir noch die Verteilungsfunktion F von X: Für $a \in [1, 2]$ gilt:

$$F(a) = P[X \leqslant a] = \int_1^a f(x)dx \overset{\text{a)}}{=} \frac{6}{23}\int_1^a (x^2+x)dx = \frac{2(a^3-1)}{23} + \frac{3(a^2-1)}{23}$$

Wir schliessen:

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1 \\ \frac{2(a^3-1)}{23} + \frac{3(a^2-1)}{23}, & \text{falls } 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 1, & \text{falls } a > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 41 [Transformierte Zufallsgrösse]
Eine diskrete Zufallsgrösse X nimmt folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten (hier im Format "$(i; P[X = i])$"):

$$(-4; 0.2),\ (-2; 0.1),\ (2; 0.4),\ (3.5; 0.1),\ (4; 0.2);$$

Lesebeispiel: der Wert 4 wird mit Wahrscheinlichkeit 0.2 angenommen.

a) Wir definieren $Y := -2X + 2$ und $Z := X^2$. Mit $P[X = i] = P[Y = -2i + 2]$ schliessen wir für Y folgende (entsprechende) Tabelle:

$$(10; 0.2),\ (6; 0.1),\ (-2; 0.4),\ (-5; 0.1),\ (-6; 0.2);$$

Ähnlich finden wir für Z, mit $P[Z = i^2] = P[X = i] + P[X = -i]$ (für $i \neq 0$), die folgende (entsprechende) Tabelle:

$$(16; 0.4),\ (4; 0.5),\ (12.25; 0.1);$$

b) Mit Definition 3.1 und a) berechnen wir:

$$E[Y] = 0.2 \cdot 10 + 0.1 \cdot 6 + 0.4 \cdot (-2) + 0.1 \cdot (-5) + 0.2 \cdot (-6) = 2 + 0.6 - 0.8 - 0.5 - 1.2 = 0.1$$

Es folgt mit Definitionen 3.1 und 3.2:

$$V[Y] = E[(Y - 0.1)^2] = 0.2 \cdot 9.9^2 + 0.1 \cdot 5.9^2 + 0.4 \cdot (-2.1)^2 + 0.1 \cdot (-5.1)^2 + 0.2 \cdot (-6.1)^2 = 34.89.$$

c) Analog wie in b) berechnen wir:

$$E[Z] = 0.4 \cdot 16 + 0.5 \cdot 4 + 0.1 \cdot 12.25 = 9.625.$$

Es folgt:

$$V[Z] = E[(Z - 9.625)^2] = 0.4 \cdot 6.375^2 + 0.5 \cdot (-5.625)^2 + 0.1 \cdot 2.625^2 = 32.765625.$$

d) Wiederum analog zu b) berechnen wir:

$$E[X] = 0.2 \cdot (-4) + 0.1 \cdot (-2) + 0.4 \cdot 2 + 0.1 \cdot 3.5 + 0.2 \cdot 4 = 0.95.$$

Wir schliessen:

$$V[X] = E[(X - 0.95)^2] = 0.2 \cdot (-4.95)^2 + 0.1 \cdot (-2.95)^2 + 0.4 \cdot (1.05)^2 + 0.1 \cdot 2.55^2 + 0.2 \cdot 3.05^2 = 8.7225.$$

Es folgt:

$$-2E[X] + 2 = 0.1 \overset{\text{b)}}{=} E[Y] \quad \text{und} \quad (-2)^2 V[X] = 34.89 \overset{\text{b)}}{=} V[Y].$$

e) Es gilt:

$$E[X^2] - (E[X])^2 = E[Z] - (E[X])^2 \underset{\text{d)}}{\overset{\text{c)}}{=}} 9.625 - 0.95^2 = 8.7225 \overset{\text{d)}}{=} V[X].$$

Aufgabe 42 [Erwartungswerte berechnen]

a) X sei eine Zufallsgrösse mit $\mathrm{Bin}(n, p)$-Verteilung, d.h.:

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

BEHAUPTUNG: Es gilt: $E[X] = np$.

Beweis: Falls $n = 1$ ist die Behauptung klar richtig und falls $n \geqslant 2$ gilt:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{n} kP[X = k] = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) P[X = k+1] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \\ &\underset{\text{2 b)}}{\overset{\text{Aufg}}{=}} np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np \end{aligned}$$

Beim zweitletzten Gleichheitszeichen haben wir benutzt, dass gilt: $(k+1)\binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}$, was ganz analog eingesehen werden kann, wie das Resultat von Aufgabe 2 b). Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir benutzt, dass $\mathrm{Bin}(n-1, p)$ eine Verteilung ist.

■

b) Z sei eine Poisson-verteilte Zufallsgrösse mit Parameter $\lambda > 0$.

BEHAUPTUNG: Es gilt: $E[Z^2] = \lambda^2 + \lambda$.

Beweis: Nach Definition 3.1 gilt:

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{\text{Def}}{\underset{3.1}{=}} \lambda E[Z] + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

■

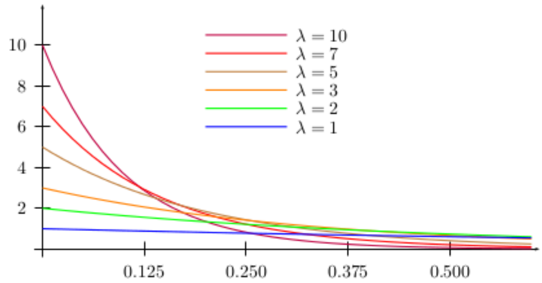
Aufgabe 43 [Exponentialverteilung]

a) Y habe eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$; d.h. die Dichte sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geqslant 0$ und gleich 0 sonst. Nun gilt nach Definition 3.1:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \left[-x e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Für die Modellierung des radioaktiven Atomzerfalls (wie in Aufgabe 27) bedeutet dies, dass die erwartete Zeit bis ein Atom zerfällt $1/\lambda$ beträgt. Also je grösser die Zerfallsrate λ desto kürzer ist die erwartete Zerfallszeit.

Hier noch eine Skizze von Graphen von Dichtefunktionen f zu verschiedenen λ's (nur für $x \geqslant 0$):



b) Y habe wieder eine Exponentialverteilung. Nach Definition 3.1 gilt:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{a)}}{=} \frac{2}{\lambda^2}.$$

Wir schliessen mit Lemma 3.7 b):

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 \overset{\text{a)}}{=} \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 44 [Harmonische Reihe und Konsorten II]

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$. Sei weiter X eine stetige Zufallsgrösse, welche nur auf dem reellen Intervall $[1, \infty)$ Werte annimmt. Die Dichte sei von der Art

$$K(\alpha) \frac{1}{x^{\alpha}},$$

wobei $K(\alpha) > 0$ eine Normierungskonstante ist.

In Aufgabe 30 haben wir bereits gezeigt dass $\alpha > 1$ gelten muss. Wir nehmen also an, dass $\alpha > 1$ gilt.

a) BEHAUPTUNG: $E[X] = \infty$ gilt genau wenn $\alpha \leqslant 2$.

Beweis: Dies folgt direkt aus $(*)$ bei d).

■

b) BEHAUPTUNG: Es gilt $E[X] < \infty$ genau dann wenn $\alpha > 2$.

Beweis: Dies folgt direkt aus a).

■

c) BEHAUPTUNG: Es gilt $E[X] < \infty$ und $E[X^2] = \infty$ genau dann, wenn $2 < \alpha \leqslant 3$.

Beweis: Dies folgt direkt aus d) mit $j = 2$.

■

d) BEHAUPTUNG: Sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geqslant 1$. Es gilt: $E[X^j] < \infty$ und $E[X^{j+1}] = \infty$ genau dann, wenn $j + 1 < \alpha \leqslant j + 2$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 1$ gilt:

$$\frac{E[X^k]}{K(\alpha)} = \int_1^\infty x^{k-\alpha} dx = \begin{cases} \lim\limits_{y\to\infty} \log(y) = \infty, & \text{falls } \alpha = k+1 \\ \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^{k+1-\alpha}}{k+1-\alpha} - \frac{1}{k+1-\alpha}, & \text{falls } \alpha \neq k+1 \end{cases}$$

Wir schliessen:

$$E[X^k] = \infty \;\Leftrightarrow\; \alpha \leqslant k+1 \qquad (*)$$

Mit $k = j$ bzw. $k = j + 1$ folgt damit die Behauptung.

■

Aufgabe 45 [sd=Mean absolute Deviation?]

Seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $P[\{\omega_1\}] = 1/3$ und $P[\{\omega_2\}] = 2/3$.

Wir definieren weiter eine Zufallsgrösse $X : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega_1) = 2$, $X(\omega_2) = -1$.

Nun gilt nach Definition 3.1 (und nach Definition 3.2):

$$\begin{aligned} \mu_X &:= E[X] = 1/3 \cdot 2 + 2/3 \cdot (-1) = 0 \\ E[|X - \mu_X|] &= E[|X|] = 1/3 \cdot |2| + 2/3 \cdot |-1| = 4/3 \in \mathbb{Q} \\ \mathrm{sd}[X] &:= \sqrt{E[(X-\mu_X)^2]} = \sqrt{E[X^2]} = \sqrt{1/3 \cdot 2^2 + 2/3 \cdot (-1)^2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Es folgt: $\mathrm{sd}[X] \neq E[|X - \mu_X|]$.