Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

6. November 2012

Aufgabe 46 [Binomialverteilung]
Eine Prüfung bestehe aus 10 "multiple choice"-Fragen. Jede Frage hat 5 mögliche Antworten, wovon nur eine richtig ist. Nehmen wir realistischerweise an, dass ein Prüfling zufällig gemäss Gleichverteilung und unabhängig die Antworten unter den verschiedenen Möglichkeiten auswählt. Sei Z die Anzahl richtiger Antworten vom Prüfling.

Wir definieren weiter für $i = 1, 2, \ldots, 10$:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls der Prüfling die Frage Nr. } i \text{ richtig beantwortet hat.} \\ 0, & \text{falls der Prüfling die Frage Nr. } i \text{ nicht richtig beantwortet hat.} \end{cases}$$

Diese X_i's sind klar unabhängig und $\mathrm{Be}(1/5)$-verteilt.

Da nun gilt: $Z = X_1 + \ldots + X_{10}$ folgt, dass Z eine $\mathrm{Bin}(10, 1/5)$-Verteilung hat. Somit folgt mit 4.2.2:

$$E[Z] = 10 \cdot 1/5 = 2 \text{ und } V[Z] = 10 \cdot 1/5 \cdot (1 - 1/5) = 8/5 = 1.6.$$

Nehmen wir nun an, dass mindestens 5 der Fragen richtig beantwortet sein müssen, um die Prüfung zu bestehen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Prüfling die Prüfung besteht genau

$$P[Z \geqslant 5] = \sum_{k=5}^{10} P[Z = k] \overset{4.2.2}{=} \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} (1/5)^k (1 - 1/5)^{10-k} = \frac{320249}{9765625} \doteq 3.27935\%.$$

Aufgabe 47 [Erwartungswert des Inversen=Inverses des Erwarungswertes?]
Seien $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ $(\omega_1 \neq \omega_2)$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit $P[\{\omega_1\}] = P[\{\omega_2\}] = 1/2$.

Wir definieren weiter eine Zufallsgrösse $X : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $X(\omega_1) := 1$ und $X(\omega_2) := 2$. Nach Definition 3.1 gilt nun:

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3} = \frac{1}{1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2} = \frac{1}{E[X]}.$$

Also gilt im Allgemeinen *nicht* $E[1/X] = 1/E[X]$.

Aufgabe 48 [Stichproben]
Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer beliebigen Verteilung. Wir definieren (arithmetisches Mittel, bzw. Stichproben-Varianz):

$$\overline{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad s^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

a) BEHAUPTUNG: Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0.$$

BEMERKUNG: Wir beweisen die Behauptung mit zwei verschiedenen Methoden.

Beweis (1. Methode): Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

■

Beweis (2. Methode): Seien $\Omega := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ und für $x \in \Omega$:

$$n_x := \#\{j \in \mathbb{N} \,|\, x = x_j\}.$$

(Siehe dazu ev. auch den Anfang von Abschnitt 3.1 im Skript)

Sei weiter $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit

$$P[\{x\}] = \frac{n_x}{n}, \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Sei weiter $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ die Zufallsgrösse, definiert durch $Y(x) := x$ für alle $x \in \Omega$. Es folgt:

$$E[Y] \overset{\text{Def}}{\underset{3.1}{=}} \sum_{x\in\Omega} x \cdot P[Y = x] = \sum_{x\in\Omega} x \cdot \frac{n_x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

und damit (analog)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{x\in\Omega}(x - E[Y])P[Y = x] \overset{\text{Def}}{\underset{3.1}{=}} E[Y - E[Y]] \overset{\text{Lem}}{\underset{3.4b)}{=}} E[Y] - E[Y] = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung sofort.

■

b) Behauptung: Es gilt:

$$s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2.$$

Bemerkung: Wir beweisen diese Behauptung ebenfalls mit zwei verschiedenen Methoden.

Beweis (1. Methode): Es gilt:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{\overline{x}}{n}\sum_{i=1}^{n}(2x_i - \overline{x}) \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \frac{\overline{x}}{n}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})}_{\overset{a)}{=}0} + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2. \end{aligned}$$

■

Beweis (2. Methode): Wir definieren die Zufallsgrösse Y genau gleich wie in dem Beweis von a) mit der 2. Methode.

Analog wie in a) kann man nachrechnen, dass gilt:

$$E[Y] = \overline{x},\ E[Y^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ und } V[Y] = s^2.$$

Damit folgt mit Lemma 3.7 b) (dies besagt: $V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$) sofort die Behauptung.

■

Aufgabe 49 [elementare Rechenregeln der Varianz; Beweis von Lemma 3.7]
Sei X eine Zufallsgrösse.

a) Behauptung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $V[aX + b] = a^2V[X]$.

Beweis: Nach Definition 3.2 und Lemma 3.4 b) gilt:

$$V[aX+b] \underset{3.2}{\overset{\text{Def}}{=}} E[(aX+b-E[aX+b])^2] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} E[(aX+b-aE[X]-b)^2] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} a^2E[(X-E[X])^2] \underset{3.2}{\overset{\text{Def}}{=}} a^2V[X].$$

■

b) Behauptung: Es gilt: $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Beweis: Nach Definition 3.2 und Lemma 3.4 b) gilt:

$$V[X] \underset{3.2}{\overset{\text{Def}}{=}} E[(X-E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} E[X^2] - (E[X])^2.$$

■

Aufgabe 50

Seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsgrössen mit folgender Verteilung: $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 1/2$, für alle $i = 1, 2, \dots, n$. Wir definieren weiter:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) Nach Definitionen 3.1 und 3.2 gilt:

$$E[X_1] = 1 \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 = 0, \; V[X_1] = E[(X_1 - E[X_1])^2] = E[X_1^2] = 1^2 \cdot 1/2 + (-1)^2 \cdot 1/2 = 1.$$

b) Nach Lemma 3.4 b) gilt

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \overset{\text{iid}}{=} nE[X_1] \overset{\text{a)}}{=} 0.$$

Da die X_i's unabhängig sind, gilt aufgrund von Lemma 3.8 b):

$$V[S_n] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] \overset{\text{iid}}{=} nV[X_1] \overset{\text{a)}}{=} n.$$

c) Behauptung: Damit in

$$\frac{S_n}{g(n)}$$

die Varianz konstant bleibt, egal wie gross n ist, muss gelten:

$$g(n) = c\sqrt{n}, \;\; \text{für ein } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beweis: Nehmen wir an, dass die Varianz von $\frac{S_n}{g(n)}$ konstant bleibt, egal wie gross n ist.

Definiere $c_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$c_0 := V\left[\frac{S_n}{g(n)}\right] \underset{3.7a)}{\overset{\text{Lem}}{=}} \frac{1}{g(n)^2} V[S_n] \overset{\text{b)}}{=} \frac{n}{g(n)^2}$$

Nach Voraussetzung ist c_0 unabhängig von n.

Da $n > 0$ folgt sofort: $c_0 > 0$. Ausserdem schliessen wir:

$$g(n) = \pm\sqrt{\frac{n}{c_0}} = c\sqrt{n}, \text{ wobei } c = \pm\sqrt{1/c_0}.$$

■

Aufgabe 51 [R, Mittelwerte und Median]

Wir generieren in R eine Stichprobe bestehend aus 5 Realisationen einer $\mathcal{N}(0,4)$-Zufallsgrösse X. Wir berechnen dann mit Hilfe von R $\overline{x} = \texttt{mean(x)}$, den "trimmed" mean für diverse "Trimmungen" und den Median:

```
> x <- rnorm(5,0,sqrt(4))
> x
[1] 1.3067793 3.2352873 0.5284505 0.1939993 1.1457709
> mean(x)
[1] 1.282057
> mean(x,0.1)
[1] 1.282057
> mean(x,0.2)
[1] 0.993667
> mean(x,0.4)
[1] 1.145771
> median(x)
[1] 1.145771
>
```

Es fällt auf, dass der "trimmed" mean bei einer "Trimmung" von 0.1 gleich $\overline{x}$ ist. Das ist nicht verwunderlich, da $0.1 = 10\%$ von 5 weniger als 1 ist, d.h. für die Berechnung werden keine Datenpunkte "abgeschnitten".

Weiter fällt auf, dass bei einer "Trimmung" von 0.4 der "trimmed" mean genau der Median ist. Dies ist ebenfalls nicht verwunderlich, da $0.4 \cdot 5 = 2$ (das sind 40% von 5). Dies bedeutet: Hier werden vor der Berechnung des means die grössten beiden und die kleinsten beiden Datenpunkte gestrichen. So bleibt aber nur noch ein Wert übrig, welcher offenbar der Median sein muss.

Aufgabe 52 [R, Mittelwerte/Varianz und Schätzung]

```
> #Teilaufgabe a):
> PN <- 2 #Personal Number PN wird hier als "lambda" benutzt
> a1=rexp(10,PN)
> a1
 [1] 1.3139574 0.6262378 0.2712233 0.2771024 0.5408249 1.0186157
 [7] 0.5740855 0.1766204 0.1860526 0.1676036
> a2=rexp(100,PN)
> a3=rexp(1000,PN)
> a4=rexp(10000,PN)
> a5=rexp(100000,PN)
>
> #Teilaufgabe b):
> mean(a1)
[1] 0.5152324
> mean(a2)
[1] 0.4367752
> mean(a3)
[1] 0.5020234
> mean(a4)
[1] 0.4947195
> mean(a5)
[1] 0.4982116
> 1/PN #Erwartungswert nach Aufgabe 43a)
[1] 0.5
>
> #Da in R die Stichproben-Varianz etwas anders berechnet wird
> #als wir sie definiert haben, definieren wir hier unsere eigene
> #Funktion s2 um "unsere" Stichproben-Varianz zu berechnen:
> s2 <- function(x) return(1/length(x) * sum((x-mean(x))^2));
> s2(a1)
[1] 0.1367907
> s2(a2)
[1] 0.1494055
```

```
> s2(a3)
[1] 0.2955610
> s2(a4)
[1] 0.2404298
> s2(a5)
[1] 0.2495526
> 1/PN^2 #Varianz nach Aufgabe 43 b)
[1] 0.25
>
>
```

Die Vermutung liegt nahe, dass die arithmetischen Mittel gegen den Erwartungswert und die Stichproben-Varianzen gegen die Varianz konvergieren.

Eine Erklärung dafür liefert das Gesetz der grossen Zahlen. (Siehe dazu Kapitel 5)

Bemerkung: Die R-Funktion `var` berechnet direkt eine Stichproben-Varianz. Jedoch wird die Stichproben-Varianz so etwas anders berechnet als wir sie in Aufgabe 48 definiert haben. Deshalb haben wir, wie in der R-Ausgabe erwähnt, unsere eigene Stichproben-Varianz Funktion `s2` definiert. Siehe dazu auch `?var` und die entsprechende Aufgabe auf Blatt 12.

Da man diese Aufgabe aber auch unabhängig von Aufgabe 48 lösen kann, wird (bzw. wurde) bei der Bewertung auch eine Lösung als komplett richtig gewertet, falls jemand direkt den Befehl `var` benutzt hat.

Aufgabe 53 [Varianz minimiert $E[(X-a)^2]$]
Sei X eine Zufallsgrösse mit $E[X^2] < \infty$.

Behauptung: Es gilt:

$$V[X] = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X-a)^2].$$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 3.4 b) gilt:

$$\begin{aligned} E[(X-a)^2] &= E[X^2] - 2aE[X] + a^2 = E[X^2] - (E[X])^2 + (a - E[X])^2 \overset{\text{Lem}}{\underset{3.7\text{b)}}{=}} V[X] + (a - E[X])^2 \\ &\geqslant V[X]. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt nach Obigem (oder nach Definition 3.2) mit $a = E[X]$: $E[(X-a)^2] = V[X]$. Wir schliessen:

$$V[X] = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X-a)^2].$$

■

Aufgabe 54

a) Sei X eine Zufallsgrösse mit $E[X^2] < \infty$.

Behauptung: Es gilt $E[X] < \infty$.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $0 \leqslant (|x|-1)^2 = x^2 - 2|x| + 1$ und damit

$$x^2 + 1 \geqslant 2|x| \geqslant |x| \geqslant x.$$

Wir schliessen:

$$\infty > E[X^2] + 1 = E[X^2] + E[1] \overset{\text{Lem}}{\underset{3.4\text{b)}}{=}} E[X^2+1] \geqslant E[X].$$

Es folgt: $E[X] < \infty$.

■

b) Seien $j, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant j$. Sei weiter X eine Zufallsgrösse mit $E[|X|^j] < \infty$.

Behauptung: Es gilt: $E[|X|^k] < \infty$.

Beweis: Wie man leicht (z.B. durch eine Fallunterscheidung $|x| \geqslant 1$, $|x| < 1$) einsieht, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|x|^j + 1 \geqslant |x|^k.$$

Wir schliessen:

$$\infty > E[|X|^j] + 1 = E[|X|^j] + E[1] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} E[|X|^j + 1] \geqslant E[|X|^k].$$

Es folgt: $E[|X|^k] < \infty$.

$\blacksquare$