Übungsblatt 12 zur Vorlesung "Einführung in die Statistik"

Olivier Warin

15. Dezember 2012

Aufgabe 80 [Eigenschaften von Schätzern]
Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung.

a) Definiere $\widehat{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) := x_1$.

BEHAUPTUNG: Der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ von μ ist erwartungstreu aber *nicht* konsistent.

Beweis: Es gilt:

$$E_\mu[\widehat{\mu}_n] \;=\; E_\mu[X_1] \;=\; \mu,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 7.2) erwartungstreu. Weiter gilt für $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;=\; P_\mu[|X_1 - \mu| > \varepsilon] \;=\; P[|\mathcal{N}(0, \sigma^2)| > \varepsilon] \;\neq\; 0,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 7.3) kein konsistenter Schätzer für μ.

$\blacksquare$

b) Definiere $\widehat{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) := \overline{x} + {}^1\!/_n$.

BEHAUPTUNG: Der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ von μ ist konsistent aber *nicht* erwartungstreu.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ mit $n > {}^2\!/_\varepsilon$, also ${}^1\!/_n < {}^\varepsilon\!/_2$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;&=\; P_\mu[|\overline{X} - \mu + {}^1\!/_n| > \varepsilon] \;\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| + {}^1\!/_n > \varepsilon] \\ &\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| > \varepsilon - {}^1\!/_n] \;\leqslant\; P_\mu[|\overline{X} - \mu| > {}^\varepsilon\!/_2] \;\underset{\text{LLN}}{\xrightarrow{n\to\infty}}\; 0, \end{aligned}$$

wobei wir hier am Schluss das Gesetz der grossen Zahlen (genauer Theorem 5.3) benutzt haben. Wir schliessen:

$$\lim_{n\to\infty} P_\mu[|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon] \;=\; 0,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 7.3) ein konsistenter Schätzer für μ.

Weiter gilt:

$$E_\mu[\widehat{\mu}_n] \;=\; E_\mu[\overline{X} + {}^1\!/_n] \;\underset{3.4\text{b)}}{\overset{\text{Lem}}{=}}\; E_\mu[\overline{X}] + {}^1\!/_n \;=\; \mu + {}^1\!/_n \;\neq\; \mu,$$

also ist $\widehat{\mu}_n$ (nach Definition 7.2) *kein* erwartungstreuer Schätzer für μ.

$\blacksquare$

BEMERKUNG: Man sagt, dass der Schätzer $\widehat{\mu}_n$ *asymptotisch erwartungstreu* ist, da $\lim_{n\to\infty} E_\mu[\widehat{\mu}_n] = \mu$.

Aufgabe 81 [KI bei Normalverteilung, $\boldsymbol{\sigma^2}$ bekannt]
Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit Standardabweichung $\sigma = 1.14$ mm und (unbekanntem) Erwartungswert μ beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ vom Umfang $n = 250$ ergab sich $\overline{x} = 12.55$ mm.

Seien $\alpha := 0.05$ und $K \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass gilt: $P[-K \leqslant \mathcal{N}(0,1) \leqslant K] = 1 - \alpha$. Es gilt also

$$K \underset{\mathbb{R}}{\doteq} \texttt{qnorm(1-0.05/2)} \underset{\mathbb{R}}{\doteq} 1.959964.$$

Wie wir in 7.2.3 gesehen haben, hat der Ausdruck

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

eine $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung. Wir schliessen:

$$1 - \alpha = P\left[-K \leqslant \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leqslant K\right] \overset{\text{wie in}}{\underset{7.2.3}{=}} P\left[\mu \in \left[\overline{X} - \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right].$$

Also ist

$$\left[\overline{x} - \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{K\sigma}{\sqrt{n}}\right] \doteq [12.40869, 12.69131]$$

eine Realisation eines $1 - \alpha = 95\%$-KI für μ.

Aufgabe 82 [$MSE = V + b^2$]
Es sei $\widehat{\mu}_n$ ein Schätzer für μ mit Bias b.

BEHAUPTUNG: Dann gilt:

$$MSE(\widehat{\mu}_n, \mu) = V_\mu[\widehat{\mu}_n] + b^2.$$

Beweis: Es gilt:

$$V_\mu[\widehat{\mu}_n] \overset{\text{Lem}}{\underset{3.7a)}{=}} V_\mu[\widehat{\mu}_n - \mu] \overset{\text{Lem}}{\underset{3.7b)}{=}} E_\mu[(\widehat{\mu}_n - \mu)^2] - (E_\mu[\widehat{\mu}_n - \mu])^2 = MSE(\widehat{\mu}_n, \mu) - b^2,$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Definitionen 7.2 und 7.5 eingesetzt haben. Somit folgt die Behauptung sofort.

■

Aufgabe 83 [MLE bei der Exponentialverteilung]
Sei $x_1, \ldots, x_n > 0$ eine Stichprobe einer Exp(λ)-verteilten Zufallsgrösse. Sei $f_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende gemeinsame Dichtefunktion. Wie wir in Aufgabe 76 a) gesehen haben, gilt hier:

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lambda^n e^{-n\lambda\overline{x}}.$$

Wir wollen nun den Maximum Likelihood Estimator (MLE) $\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ für λ bestimmen. Nach 7.1.4 gilt

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \underset{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}} f_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

und da $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, folgt:

$$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \underset{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}} \log(f_\lambda(x_1, \ldots, x_n)) = \underset{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}}(n\log(\lambda) - n\lambda\overline{x}) = \underset{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}}{\operatorname{argmax}}(\log(\lambda) - \lambda\overline{x}).$$

Wir suchen also die Maximumsstelle der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(\lambda) := \log(\lambda) - \lambda\overline{x}$. Dazu leiten wir g zweimal ab:

$$\frac{dg}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \overline{x}, \quad \frac{d^2 g}{d\lambda^2}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} < 0.$$

$\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}$ ist also einfach die Nullstelle von $\frac{dg}{d\lambda}$. Somit folgt:

$$\frac{1}{\widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}}} - \overline{x} = 0 \Rightarrow \widehat{\lambda}_n^{\text{MLE}} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Dieses Resultat macht Sinn, da $\overline{x}$ bekanntlich ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für $E[X_1]$ ist und es gilt hier $E[X_1] = 1/\lambda$.

Aufgabe 84 [MLE bei der Benoulli-Verteilung]
Sei $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ eine Stichprobe einer Bernoulli-Verteilung mit Parameter $\theta \in (0,1)$. Sei $p_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die entsprechende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion. Wie wir in 6.3.2 gesehen haben gilt hier:

$$p_\theta(x_1, \ldots, x_n) \;=\; (1-\theta)^n \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \;=\; (1-\theta)^n \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{n\overline{x}}$$

Wir wollen nun den Maximum Likelihood Estimator (MLE) $\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}}$ für θ bestimmen. Nach 7.1.4 gilt

$$\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \;=\; \underset{\theta \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\, p_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

Nun nehmen wir zuerst an, dass $0 < \overline{x} < 1$ gilt. Da in diesem Fall $p_0(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ nimmt $p_\theta(x_1, \ldots, x_n)$ das Maximum sicher nicht für $\theta = 0$ oder $\theta = 1$ an.

Da weiter $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, folgt damit:

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} &= \underset{\theta \in (0,1)}{\operatorname{argmax}} \log(p_\theta(x_1, \ldots, x_n)) \;=\; \underset{\theta \in (0,1)}{\operatorname{argmax}} \left(n \log(1-\theta) + n\overline{x}(\log(\theta) - \log(1-\theta))\right) \\
&= \underset{\theta \in (0,1)}{\operatorname{argmax}} \left(\log(1-\theta) + \overline{x}(\log(\theta) - \log(1-\theta))\right) \;=\; \underset{\theta \in (0,1)}{\operatorname{argmax}} \left((1-\overline{x}) \log(1-\theta) + \overline{x} \log(\theta)\right).
\end{aligned}$$

Wir suchen also die Maximumsstelle der Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(\theta) := (1-\overline{x}) \log(1-\theta) + \overline{x} \log(\theta)$. Dazu leiten wir g zweimal ab:

$$\frac{dg}{d\theta}(\theta) \;=\; \frac{\overline{x}-1}{1-\theta} + \frac{\overline{x}}{\theta}, \quad \frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta) \;=\; \frac{\overbrace{\overline{x}-1}^{<0}}{(1-\theta)^2} - \frac{\overbrace{\overline{x}}^{>0}}{\theta^2} \;<\; 0$$

$\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}}$ ist also einfach die Nullstelle von $\frac{dg}{d\theta}$. Somit folgt:

$$\frac{\overline{x}-1}{1-\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}}} + \frac{\overline{x}}{\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}}} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \;=\; \overline{x}.$$

Falls nun $\overline{x} = 0$ gilt:

$$\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \;=\; \underset{\theta \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\, p_\theta(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \underset{\theta \in [0,1]}{\operatorname{argmax}} (1-\theta)^n \;=\; 0 \;=\; \overline{x}.$$

Falls $\overline{x} = 1$ gilt:

$$\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \;=\; \underset{\theta \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\, p_\theta(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \underset{\theta \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\, \theta^n \;=\; 1 \;=\; \overline{x}.$$

Wir erhalten also in jedem Fall:

$$\widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \;=\; \overline{x}.$$

Dieses Resultat macht Sinn, da z.B. dieser Schätzer erwartungstreu und konsistent für $E[X_1]$ ist.

Aufgabe 85 [KI bei Normalverteilung, $\boldsymbol{\sigma^2}$ unbekannt]
Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 17$ erhält man einen mittleren Durchmesser $\overline{x} = 9.2$ mm und eine Streuung

$$\widehat{\sigma} \;=\; \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{17} (x_i - \overline{x})^2} \;=\; 0.59 \text{ mm}.$$

Nach 7.2.4 (genauer (7.8)) ist nun eine Realisation eines $(1-\alpha) = 95\%$-KIs für den Erwartungswert μ gegeben durch

$$\left[\overline{x} - \frac{CV\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{CV\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right],$$

wobei CV der entsprechende kritische Wert ist. Genauer gilt hier: $P[-CV \leqslant t_{n-1} \leqslant CV] = 1 - \alpha$, also

$$CV \;\underset{\text{R}}{\doteq}\; \texttt{qt(1-0.05/2,17-1)} \;\underset{\text{R}}{\doteq}\; 2.119905.$$

Wir erhalten also die folgende Realisation eines $(1-\alpha)$-KIs für den Erwartungswert μ:

$$\left[\overline{x} - \frac{CV\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{CV\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] \;\underset{\text{R}}{\doteq}\; [8.907336, 9.492664].$$

Aufgabe 86 [Erwartungstreuer Schätzer der Varianz]
Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid-Zufallsgrössen mit $E[X_1^2] < \infty$.

BEHAUPTUNG: Der Ausdruck

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz $V[X_1]$.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass gilt:

$$E[\overline{X}] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j] \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{n}\cdot n \cdot E[X_1] = E[X_1] \tag{$*$}$$

$$V[\overline{X}] \underset{3.7a)}{\overset{\text{Lem}}{=}} \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] \underset{3.8b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V[X_j] \overset{\text{iid}}{=} \frac{V[X_1]}{n}. \tag{$**$}$$

Nun schliessen wir:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2\right] &\underset{48b)}{\overset{\text{Aufg}}{=}} E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X}^2\right] \underset{3.4b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] - E[\overline{X}^2] \overset{\text{iid}}{=} E[X_1^2] - E[\overline{X}^2] \\
&\underset{3.7b)}{\overset{\text{Lem}}{=}} V[X_1] + (E[X_1])^2 - V[\overline{X}] - (E[\overline{X}])^2 \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} V[X_1] - \frac{V[X_1]}{n} \\
&= \frac{(n-1)V[X_1]}{n}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung sofort mit Lemma 3.4 b).

■

Aufgabe 87 [Konfidenzintervalle für Proportionen]
Wir führen eine Umfrage bei $n = 1000$ Personen durch. Wir gehen davon aus, dass diese 1000 Personen repräsentativ ausgewählt wurden und jeweils ehrliche Antworten gaben. Wir definieren für $i = 1, \ldots, n$:

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls Person } i \text{ angegeben hat, dass sie Mitt Romney wählen wird} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die X_i's haben eine Bernoulli-Verteilung. Wir nehmen an, dass die X_i's iid sind. Sei $\theta := P[X_1 = 1]$.

In der Umfrage haben nun genau 555 Personen angegeben, dass sie Mitt Romney wählen werden. In unserer Formalisierung bedeutet dies:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 555.$$

a) Wir schätzen nun θ mit der MLE-Methode:

$$\widehat{\theta}_n := \widehat{\theta}_n^{\text{MLE}} \underset{84}{\overset{\text{Aufg}}{=}} \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{555}{1000} = 0.555.$$

Dieser Schätzer ist bekanntlich erwartungstreu und nach dem Gesetz der grossen Zahlen (Theorem 5.3) auch konsistent für θ.

Der geschätzte Anteil der Anhänger von Mitt Romney lautet also $\widehat{\theta}_n = 0.555$.

b) Wir suchen nun eine Realisation eines 95%-KIs für den Anteil der Anhänger von Mitt Romney. Wir benutzen dazu den CLT (Theorem 5.4): Der Ausdruck

$$\frac{n\overline{X} - nE[X_1]}{\sqrt{nV[X_1]}} = \frac{n\overline{X} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

ist ungefähr $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Sei $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $P[\mathcal{N}(0,1) \in [-K, K]] = 0.95$. Es gilt also:

$$K \underset{\text{R}}{\doteq} \texttt{qnorm(0.975)} \underset{\text{R}}{\doteq} 1.959964.$$

Es folgt:

$$0.95 \underset{\text{CLT}}{\doteq} P\left[\frac{n\overline{X}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \in [-K,K]\right] = P\left[\theta \in \left[\overline{X} - \frac{K\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{K\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{n}}\right]\right].$$

Da wir θ natürlich nicht kennen, setzen wir nun noch $\widehat{\theta}_n$ für θ ein. Dies führt uns zu folgender approximativen Realisation eines 95%-KIs für den Anteil der Anhänger von Mitt Romney:

$$\left[\overline{x} - \frac{K\sqrt{\widehat{\theta}_n(1-\widehat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{K\sqrt{\widehat{\theta}_n(1-\widehat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}}\right] \underset{\text{a)}}{\doteq} [0.5241983, 0.5858017].$$

Bemerkung: Wir können auch darauf verzichten $\widehat{\theta}_n$ für θ einzusetzen und erhalten so eine etwas genauere Approximation. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{n\overline{X}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \in [-K,K] \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(n\overline{X}-n\theta)^2}{n\theta(1-\theta)} = \frac{n(\overline{X}-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} \leqslant K^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (n+K^2)\theta^2 - (2n\overline{X}+K^2)\theta + n\overline{X}^2 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \in \left[\frac{2n\overline{X}+K^2-\sqrt{\Delta}}{2(n+K^2)}, \frac{2n\overline{X}+K^2+\sqrt{\Delta}}{2(n+K^2)}\right],\end{aligned}$$

wobei $\Delta = (2n\overline{X}+K^2)^2 - 4(n+K^2)n\overline{X}^2$.

Da weiter

$$0.95 \underset{\text{CLT}}{\doteq} P\left[\frac{n\overline{X}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \in [-K,K]\right],$$

liefert uns obige Umformung die folgende (approximative) Realisation eines 95%-KIs für θ ($\delta := (2n\overline{x}+K^2)^2 - 4(n+K^2)n\overline{x}^2$):

$$\left[\frac{2n\overline{x}+K^2-\sqrt{\delta}}{2(n+K^2)}, \frac{2n\overline{x}+K^2+\sqrt{\delta}}{2(n+K^2)}\right] \underset{\text{a)}}{\doteq} [0.5240461, 0.5855329].$$