Übungsblatt 1 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Repetition WTS

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 13, Abgabe der Lösungen: Woche 15 (bis Dienstag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15, Donnerstag, 13-15 od 16-18 Uhr

---

Must

Aufgabe 1 [einfachste Aufgaben P, X] [1+1]

a) X sei $\mathcal{N}(3,9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[2 < X < 7]$.

b) X sei $\mathcal{N}(2,9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[1 < X^2 < 2]$.

Aufgabe 2 [einfachste Aufgaben E, V] [1+1+1+3]

a) Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/2)$-Zufallsgrösse. Es gelte $X \coprod Y$. Wie ist die Verteilung von $X - Y$.

b) Sei X eine Zufallsgrösse mit Dichtefunktion $K \exp^{-(x-8)^{10}}$ auf $\mathbb{R}$. Geben Sie den Erwartungswert $E[X]$ an. Begründung aber ohne Beweis.

c) X sei $\mathcal{N}(3,4)$-verteilt. Berechnen Sie $E[X^2]$.

d) Sei X eine $\mathcal{N}(2,4)$-Zufallsgrösse und Y eine Po(3)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $E[X+Y]$, $E[X+Y+7]$ und $E[X^2+Y^2]$. Sie dürfen dazu Resultate aus der Vorlesung benutzen und müssen einzelne Erwartungswerte nicht nochmals berechnen.

Standard

Aufgabe 3 [Transformation von Zufallsgrössen] [1+1+1+1+1+1 Punkte]

X habe Dichte $f(x) = Kx^5$ auf dem Intervall $[0,1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie

a) die Normierungskonstante K

b) $E[X]$

c) $E[1/X^2]$

d) die Verteilungsfunktion von $Y := 1/X^2$

e) die Dichte von $Y := 1/X^2$.

f) die Wahrscheinlichkeit $P[Y \in (2,3)]$.

Aufgabe 4 [Konvergenz] [3 Punkte]

Sei $X_i, i \geq 1$, eine Folge von paarweise unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrössen mit Erwartungswert μ und $E[|X_1|] < \infty$. Untersuchen Sie, wogegen der Ausdruck

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

konvergiert und beweisen Sie diese Konvergenzaussage mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung WTS.

Aufgabe 5 [3+1+2 Punkte]

Sie haben eine Stichprobe $x_1 \in [0, 2]$ vom Umfang $n = 1$ (Rechnungen sind dann einfacher).

a) Testen Sie mit dem Neyman-Pearson-Lemma zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die Zufallsgrösse, welche diesen Wert generiert hat, eine

$\mathcal{H}_0$: Dichtefunktion der Art $f(x) = K_1 x^2$ für $x \in [0, 2]$, 0 sonst, hat, oder

$\mathcal{H}_1$: Dichtefunktion der Art $f(x) = K_2 x^3$ für $x \in [0, 2]$, 0 sonst, hat.

b) Berechnen Sie beim Test von a) das β.

c) Herr Meier weiss nichts von Neyman-Pearson und entscheidet sich mit einer einfachen Regel: Wenn $x \in [1.5, 2]$, nimmt er $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$. Wie sind sein α und β?

Aufgabe 6 [3 Punkte]

4 Stahlbolzen werden ausgemessen. Die Längen sind

$$13.4, 13.3, 13.6, 13.4$$

Zentimeter. Berechnen Sie ein 95%-KI für die Varianz der Länge. Setzen Sie Normalverteilung voraus.

Aufgabe 7 [1+4 Punkte]

Ein Hersteller behauptet, sein Starter-Gerät versagt durchschnittlich höchstens jedes 100te Mal. Eine Konsumentenschutz-Organisation bezweifelt dies uns denkt, dass es häufiger vorkommt. In 2000 unabhängigen Versuchen hat das Starter-Gerät 23 mal versagt. Wir modellieren dieses Problem mit einer Be(p) bzw Bin(n,p)-Verteilung:

Testen Sie approximativ (CLT) mit dem Neyman-Person-Lemma auf dem Niveau 0.05, ob

$\mathcal{H}_0$: die Versagenswahrscheinlichkeit $p \leq 0.01$, oder

$\mathcal{H}_1$: die Versagenswahrscheinlichkeit $p > 0.01$.

Benutzen Sie an geeigneter Stelle den CLT.

Aufgabe 8 [3+1+1 Punkte]

Doktor Meier stellt folgende Theorie auf: in einem gewissen kleinen Intervall gilt: je mehr Karotten Menschen essen, desto besser wird ein bestimmter Blutwert. Dazu nimmt Doktor Meier erstmals 5 ProbandInnen und gibt ihnen unterschiedliche Dosen Karotten pro Tag und misst danach den Blutwert. Er erhält dabei folgende Wertepaare (Karotten in Gramm pro Tag, Blutwert in kleiner Einheit):

$$(10, 19), (20, 24), (30, 32), (40, 35), (50, 39).$$

Hierzu will Meier eine einfache Regression durchführen (Blutwert als Funktion des Karottenkonsums - seine Theorie!).

a) Testen Sie als sein/e statistische/r Consultant/in auf dem Niveau 0.05, ob $\beta_1 = 0$ oder nicht (zweiseitig). Geben Sie dazu auch den Wert der Teststatistik an.

b) Falls Sie die Nullhypothese verworfen haben, formulieren Sie in Worten, wie die Abhängigkeit von Karottenkonsum und Blutwert ist (in der Art: "pro Gramm mehr Karotten ....")

c) Geben Sie bitte auch den Korrelationskoeffizienten an.

Honours

Aufgabe 9 [CLT] [2+3 Punkte]

Unser WTS-Theorem 5.4 [Zentraler Grenzwertsatz] setzt voraus, dass die Zufallsgrössen "iid" sind (unabhängig, identisch verteilt). Diese strenge Forderung kann in Verallgemeinerungen dieses Satzes gelockert werden. Wir wollen zeigen, dass nachfolgende Verallgemeinerung zu weit geht - also falsch ist. Konstruieren Sie dazu ein - einfach aufgebautes - Gegenbeispiel, dass zeigt, dass der folgende Satz so nicht richtig sein kann:

Sei $X_k, k \geq 1$, eine Folge von unabhängigen Zufallsgrössen mit gleichem Erwartungswert μ und Varianzen $0 < V[X_k] =: \sigma_k^2 < \infty$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt für $a \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$P\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}} \leq a\right] \longrightarrow P[\mathcal{N}(0, 1) \leq a]$$

wenn $n \to \infty$.

a) 2 Punkte für Konstruktion des Gegenbeispiels
b) 3 Punkte für mathematisch exakten Beweis (zum Beispiel an Hand des Gegenbeispiel's aus a)), dass obiger Satz falsch ist.