Übungsblatt 1 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

<u>Repetition WTS</u>

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 08, Abgabe der Lösungen: Woche 09 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 10

Must

<u>Aufgabe 1 [einfachste Aufgaben P, X]</u>

a) X sei $\mathcal{N}(3,9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[2 < X < 7]$.

b) X sei $\mathcal{N}(2,9)$-verteilt. Berechnen Sie $P[1 < X^2 < 2]$.

<u>Aufgabe 2 [einfachste Aufgaben E, V]</u>

a) Sei X eine $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2/2)$-Zufallsgrösse. Es gelte $X \coprod Y$. Wie ist die Verteilung von $X - Y$.

b) Sei X eine Zufallsgrösse mit Dichtefunktion $K \exp^{-(x-8)^{10}}$ auf $\mathbb{R}$. Geben Sie den Erwartungswert $E[X]$ an. Begründung aber ohne Beweis.

c) X sei $\mathcal{N}(3,4)$-verteilt. Berechnen Sie $E[X^2]$.

d) Sei X eine $\mathcal{N}(2,4)$-Zufallsgrösse und Y eine Po(3)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $E[X+Y]$, $E[X+Y+7]$ und $E[X^2+Y^2]$. Sie dürfen dazu Resultate aus der Vorlesung benutzen und müssen einzelne Erwartungswerte nicht nochmals berechnen.

Standard

<u>Aufgabe 3 [Transformation von Zufallsgrössen]</u> [3 Punkte]

X habe Dichte $f(x) = Kx^5$ auf dem Intervall $[0,1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie

a) die Normierungskonstante K

b) $E[X]$

c) $E[1/X^2]$

d) die Verteilungsfunktion von $Y := 1/X^2$

e) die Dichte von $Y := 1/X^2$.

f) die Wahrscheinlichkeit $P[Y \in (2,3)]$.

Aufgabe 4 [Konvergenz] [2 Punkte]

Sei $X_i, i \geq 1$, eine Folge von paarweise unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrössen mit Erwartungswert μ und $E[|X_1|] < \infty$. Untersuchen Sie, wogegen der Ausdruck

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

konvergiert und beweisen Sie diese Konvergenzaussage mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung WTS.

Aufgabe 5 [3 Punkte]

Sie haben eine Stichprobe $x_1 \in [0, 2]$ vom Umfang $n = 1$ (Rechnungen sind dann einfacher).

a) Testen Sie mit dem Neyman-Pearson-Lemma zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die Zufallsgrösse, welche diesen Wert generiert hat, eine

$\mathcal{H}_0$: Dichtefunktion der Art $f(x) = K_1 x^2$ für $x \in [0, 2]$, 0 sonst, hat, oder

$\mathcal{H}_1$: Dichtefunktion der Art $f(x) = K_2 x^3$ für $x \in [0, 2]$, 0 sonst, hat.

b) Berechnen Sie beim Test von a) das β.

c) Herr Meier weiss nichts von Neyman-Pearson und entscheidet sich mit einer einfachen Regel: Wenn $x \in [1.5, 2]$, nimmt er $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$. Wie sind sein α und β?

Aufgabe 6 [4 Punkte]

Ein Hersteller behauptet, sein Starter-Gerät versagt durchschnittlich höchstens jedes 100te Mal. Eine Konsumentenschutz-Organisation bezweifelt dies uns denkt, dass es häufiger vorkommt. In 2000 unabhängigen Versuchen hat das Starter-Gerät 23 mal versagt.

Testen Sie approximativ (CLT) mit dem Neyman-Person-Lemma auf dem Niveau 0.05, ob

$\mathcal{H}_0$: die Versagenswahrscheinlichkeit $p \leq 0.01$, oder

$\mathcal{H}_1$: die Versagenswahrscheinlichkeit $p > 0.01$.

Benutzen Sie an geeigneter Stelle den CLT.