Übungsblatt 2 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

R/S-PLUS, CLT und Grundlagen der Statistik

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 12

Must

Aufgabe 7 [individuelle Einführung Statistik-Paket]

Kapitel 1 und 2 im Dalgaard durcharbeiten

Aufgabe 8 [einfache Berechnungen I]

Berechnen Sie in R/S-PLUS folgende Wahrscheinlichkeiten (ohne in Tabellen aus Büchern nachzuschlagen):

a) $P[\mathcal{N}(0,1) > 3]$ (das ist kurz für X sei standardnormalverteilt; $P[X > 3]$)

b) $P[\mathcal{N}(35,36) > 42]$

c) Wahrscheinlichkeit für 10 Erfolge bei 10 unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit 0.8.

d) $P[\chi^2_2 > 6.5]$

Aufgabe 9 [einfache Berechnungen II]

Bei einer Normalverteilung gilt approximativ die Regel, dass 5 % der Realisationen ausserhalb von 2 Standardabweichungen um den Mittelwert liegen.

a) Wie ist die genaue Schranke; d.h. finde a: $P[|\mathcal{N}(0,\sigma^2)| > a\sigma] = 0.05$.

b) finde b: $P[|\mathcal{N}(0,\sigma^2)| > b\sigma] = 0.01$.

c) finde d: $P[|\mathcal{N}(0,\sigma^2)| > d\sigma] = 0.001$.

d) finde u: $P[|\mathcal{N}(0,\sigma^2)| > u\sigma] = 0.1$.

Standard

Aufgabe 10 [CLT] [3+3 Punkte]

Unser WTS-Theorem 5.4 [Zentraler Grenzwertsatz] setzt voraus, dass die Zufallsgrössen "iid" sind (unabhängig, identisch verteilt). Diese strenge Forderung kann in Verallgemeinerungen dieses Satzes gelockert werden. Wir wollen zeigen, dass nachfolgende Verallgemeinerung zu weit geht - also falsch ist. Konstruieren Sie dazu ein - einfach aufgebautes - Gegenbeispiel, dass zeigt, dass der folgende Satz so nicht richtig sein kann:

Sei $X_k, k \geq 1$, eine Folge von unabhängigen Zufallsgrössen mit gleichem Erwartungswert μ und Varianzen $0 < V[X_k] =: \sigma_k^2 < \infty$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt für $a \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$P\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}} \leq a\right] \longrightarrow P[\mathcal{N}(0,1) \leq a]$$

wenn $n \to \infty$.

a) 3 Punkte für Konstruktion des Gegenbeispiels
b) 3 Punkte für mathematisch exakten Beweis (zum Beispiel an Hand des Gegenbeispiel's aus a)), dass obiger Satz falsch ist.

Aufgabe 11 [Aktionsraum, Entscheidungsfunktion, Verlustfunktion & Risiko] [1+1+3 Punkte]

Sei $(X)_{i=1}^{n}$ eine Folge von iid Be(p)-verteilten Zufallsgrössen, $p \in [0,1]$. Sie möchten p schätzen. Dazu haben Sie eine Realisation $(x_1, \ldots, x_n)$.

a) Geben Sie den Aktionsraum $\mathcal{A}$ für dieses Problem an.

b) Geben Sie eine sinnvolle Entscheidungsfunktion an.

c) Berechnen Sie bei quadratischer Verlustfunktion das Risiko obiger Entscheidungsfunktion.