Übungsblatt 4 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

<u>Testtheorie: θ_0 vs θ_1</u>

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 13 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 14

Must

<u>Aufgabe 15 [Warum Quotient und nicht Differenz der Dichten?]</u>

Warum ist das Verhältnis der Dichten (aus $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$) wichtig und nicht zum Beispiel die Differenz?

Dazu folgende 2 Hypothesen: In $\mathcal{H}_0$ haben wir die Dichtefunktion auf dem Intervall $[0,1]$ folgendermassen konzentriert:

$$f_0(x) = \begin{cases} 8 & x \in [0, 0.05] \\ \frac{1}{9} & x \in (0.05, 0.95] \\ 10 & x \in (0.95, 1]. \end{cases}$$

In $\mathcal{H}_1$ haben wir die Dichtefunktion auf dem Intervall $[0,1]$ folgendermassen konzentriert:

$$f_1(x) = \begin{cases} 10 & x \in [0, 0.05] \\ 0.5 & x \in (0.05, 0.95] \\ 1 & x \in (0.95, 1]. \end{cases}$$

(die Dichten können also offenbar wild verschieden sein). Wenn $\mathcal{H}_0$ richtig ist, dürfen wir in 5 % der Fälle eine Fehlentscheidung machen (Risiko 1. Art). Wie wird man sich sinnvollerweise verhalten, wenn nur eine Realisation x_1 bekannt ist (mit Satz 4.1)? Wie ist das Risiko 2. Art mit der Methode aus Satz 4.1?

Berechnen Sie in den 3 Bereichen auch die Differenzen und die Verhältnisse der beiden Dichten aus den beiden Verteilungen. Wie ist das Risiko 2. Art, wenn man auf die Differenz der Dichten schaut statt auf das Verhältnis (bei gleichem Risiko 1. Art!).

Sie werden in obigen Rechnungen eine gewisse Freiheit haben, wo Sie den Ablehnungsbereich genau wählen - aber nur eine *gewisse* Freiheit!

<u>Aufgabe 16 [Klare Fälle und Neyman-Pearson]</u>

Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang 10 aus einer Normalverteilung mit Varianz 1. Wir wissen nicht, ob der Mittelwert 0 ($\mathcal{H}_0$-Hypothese) oder 100 ($\mathcal{H}_1$-Hypothese) ist. Wie sieht ein Test mit dem Lemma von Neyman-Person aus ($\alpha = 0.1$)? Ist es sinnvoll, hier einfach stur das Lemma von Neyman-Pearson so einzusetzen?

Standard

Aufgabe 17 [Umkehrung der Fragestellung] [3+5 Punkte]

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine iid Folge von Be(p)-Zufallsgrössen ($P[X = 1] = p = 1 - P[X = 0]$). Eine ForscherIn möchte jetzt einen Test durchführen. Der Test sieht folgendermassen aus: Die Nullhypothese $\mathcal{H}_0 : p = 0.45$ wird genau dann abgelehnt, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq n/2.$$

a) Berechnen Sie im Fall $n = 2$ die Grösse des Tests ("das α").

b) Berechnen Sie im Fall $n = 100$ die Grösse des Tests ("das α"). Benutzen Sie den CLT als approximatives Verfahren.

Aufgabe 18 [feineres Testen dank grösserem Stichprobenumfang] [3 Punkte]

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mathrm{PN}, 1)$-Verteilung. Dabei bezeichnet PN die **P**ersonal-**N**umber jedeR StudentIn. Wir testen jetzt $\mathcal{H}_0$: Mittelwert ist (PN$-$0.1) gegen $\mathcal{H}_1$: Mittelwert ist PN (wir wissen, dass PN der richtige Wert ist!). Nehmen Sie $\alpha = 0.05$.

a) $n = 36$
b) $n = 100$
c) $n = 256$
d) $n = 400$
e) $n = 10'000$

Berechnen Sie zuerst in allen 5 Situationen den Ablehnungsbereich und generieren Sie danach in einer geeigneten Rechenumgebung in allen 5 Fällen eine solche Stichprobe. Wie werden Sie in diesen 5 Situationen entscheiden (wenn Sie kurz vergessen, dass *Sie* wissen, dass PN der richtige Mittelwert ist)?

Honours

Aufgabe 19 [mit Hilfe von R/S-PLUS; Bsp wo nicht MLQ gilt] [1+2 Punkte]

Die Cauchy-Zufallsgrösse (vgl. 1.4.2.5) ist ein praktisches Gegenbeispiel für viele Untersuchungen ($E[|X|] = \infty$ und vieles mehr). Die Dichtefunktion ist

$$f(x) = \frac{d}{\pi(d^2 + (x - m)^2)};$$

dabei ist m der Median und d ein Skalenparameter. Wir setzen hier $d = 1$ und untersuchen mit einer Einerstichprobe ($n = 1$), ob $m = 0$ ($\mathcal{H}_0$) oder $m = 1$ ($\mathcal{H}_1$). Die minimal suffiziente Statistik ist $x := x_1$. Wir wollen (*und können*!) Satz 4.1 anwenden. Schwierig wird (wegen fehlendem MLQ) die Berechnung des Ablehnungsbereichs.

a) Untersuchen Sie als Vorbereitung auf b), wie sich der Likelihood-Quotient verhält (wo fallend, steigend, wieder fallend; keine genauen Berechnungen, sondern grobe Abschätzung reicht).

b) Berechnen Sie in R/S-PLUS durch pröbeln die Grenzen, wo Sie *mit Satz 4.1* die Nullhypothese ablehnen / Alternativhypothese annehmen sollten. Nehmen Sie $\alpha = 0.1$ und suchen Sie Werte, sodass die Genauigkeit 5 Promille beträgt (Risiko erster Art im Intervall $[9.5\%, 10.5\%]$). Es wird klar verlangt, dass Satz 4.1 benutzt wird und also das Risiko 2. Art minimiert wird. Wir suchen nicht irgendein Intervall oder Bereich, wo wir $\mathcal{H}_0$ ablehnen, sondern den Bereich, damit das Risiko 2. Art minimal ist. Tipp: a<-seq(0,3,0.01) und b<-dcauchy(a,1)/dcauchy(a,0); Vorsicht: Indexe um 1 verschoben ([1] $\equiv$ 0.00 und *nicht* 0.01)!