Übungsblatt 6 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Testtheorie: $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ vs $\theta \notin [\theta_1, \theta_2]$, UMPU-Tests, Cox-Hinkley

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 14, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Donnerstag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 17

Must

Aufgabe 24 [diese sieben Bedingungen...]

Zeigen Sie im Fall einer Stichprobe aus $\mathcal{N}(\mu, 1)$, dass die sieben Bedingungen aus Satz 4.12 erfüllt sind.

Standard

Aufgabe 25 [unbiased bei Tests] [2+2 Punkte]

Sei $x_1, ..., x_4$ eine Stichprobe aus einer Be(p)-Verteilung. Wir testen $H_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ mit folgendem Test:

$$d_1(x) = I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 2].$$

a) Ist dieser Test unverfälscht?

b) Gibt es ein $p_0 \in (0, 1)$, sodass der Test

$$d_2(x) = I[x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \notin \{2, 3\}]$$

unverfälscht ist für $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$?

Aufgabe 26 [mit Hilfe von R/S-PLUS; UMPU bei Symmetrie] [2 Punkte]

Sei $x_1, \ldots, x_{10}$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\theta, 1)$-Verteilung. $\mathcal{H}_0 : \theta \in [1, 2]$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \notin [1, 2]$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.1.

Aufgabe 27 [mit Hilfe von Rechnern; UMPU vs Cox-Hinkley] [2+1+2+1 Punkte]

a) Sei x eine Einerstichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. $\mathcal{H}_0 : \theta = 1$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \neq 1$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.1.

b) Lösen Sie a) mit Cox-Hinkley und vergleichen Sie.

c) Sei $x_1, \ldots, x_{10}$ eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit Parameter θ. $\mathcal{H}_0 : \theta \in [1, 2]$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \notin [1, 2]$. Konstruieren Sie einen UMPU-Test nach Satz 4.12 (exakt!) zum Niveau 0.05.

d) Lösen Sie c) mit Cox-Hinkley und vergleichen Sie.

Tipp zu c): Beginnen Sie mit dem Intervall $[0, t_2]$ so, dass $E_1[d(\mathbf{X})] = \alpha$ und berechnen Sie dann $E_2[d(\mathbf{X})]$. $E_2[d(\mathbf{X})]$ wird kleiner als α sein. Dann nehmen Sie in kleinen Iterationsschritten (t_1 erhöhen) $[t_1, t_2]$ immer jeweils so, dass $E_1[d(\mathbf{X})] = \alpha$. Man kann zeigen (siehe Vlsg), dass $E_2[d(\mathbf{X})]$ wachsend ist - brechen Sie ab, sobald Sie auch hier α haben.