

# Übungsblatt 9 zur Vorlesung

## ”Statistische Methoden”

### Schätztheorie und Konfidenzintervalle

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 22, Abgabe der Lösungen: Woche 24 (bis Dienstag, 16.15 Uhr),  
Besprechung: Woche 24, Donnerstag, 13-15 od 16-18 Uhr

---

#### Must

#### Aufgabe 38 [K I; Eigenschaften von Schätzern]

Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Stichprobe aus einer  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Geben Sie *einfache* Beispiele für:

- einen Schätzer für  $\mu$ , der zwar erwartungstreu, aber nicht konsistent ist.
- einen Schätzer für  $\mu$ , der zwar konsistent, aber nicht erwartungstreu ist.

#### Aufgabe 39 [K I; $MSE = V + b^2$ , Lemma 5.6]

Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus 5.1.3 gilt:

$$MSE(\hat{\mu}_n, \mu) = V[\hat{\mu}_n] + b^2.$$

#### Aufgabe 40 [K I; Konfidenzintervalle]

Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang  $n = 30$  erhält man einen mittleren Durchmesser  $\bar{x} = 10.2$  mm und eine Streuung

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2} = 0.62 \text{ mm.}$$

Bestimmen Sie hieraus Konfidenzintervalle für den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  zum Niveau  $1 - \alpha = 0.95$ .

#### Aufgabe 41 [K I; Konfidenzintervalle]

Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit  $\sigma = 1.04$  mm beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe vom Umfang  $n = 300$  ergab sich  $\bar{x} = 12.14$  mm. Bestimmen Sie für die Vertrauenswahrscheinlichkeit von 0.99 die Grenzen des KI für den mittleren Durchmesser dieser Kugeln.

#### Standard

#### Aufgabe 42 [K I; MLE bei der Exponentialverteilung] [2 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten  $x_1, \dots, x_n$  aus einer Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda > 0$  stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: Benutzen Sie *unbedingt* den Logarithmus an geeigneter Stelle.

**Aufgabe 43 [K I; Erwartungstreuer Schätzer der Varianz]** [3 Punkte]

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Folge von iid-Zufallsgrößen mit  $E[X_1^2] < \infty$ . Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz. Dieses Resultat gilt übrigens für beliebige Verteilungen! "Tipp": einfach drauflosrechnen.

**Aufgabe 44 [K I; Momentenmethode]** [2 Punkte]

Sei  $x_1, \dots, x_k$  eine Stichprobe aus einer Gamma( $n, \lambda$ )-Verteilung,  $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ . Schätzen Sie mit Hilfe der Momentenmethode  $n$  und  $\lambda$ .

**Aufgabe 45 [K I; Konfidenzintervalle]** [2 Punkte]

Eine Stichprobe von 101 Geburten ergab ein mittleres Geburtsgewicht von 3.38 kg mit einer geschätzten Standardabweichung von 0.45 kg. Geben Sie das Vertrauensintervall für das mittlere Geburtsgewicht an mit 90 % und 99 % -Niveau.

**Aufgabe 46 [K I; Konfidenzintervalle]** [1+2 Punkte]

Die Bestimmung des Durchmessers von Mohnblüten ergab einen Mittelwert von 64 mm mit einer geschätzten Varianz von 49 mm<sup>2</sup>. Geben Sie das 95 % KI für den Mittelwert an wo

- a) 101 Blüten gemessen wurden
- b) 1000 Blüten gemessen wurden.

**Honours**

**Aufgabe 47 [K I; Uniformverteilung und MLE]** [1+1+1+1 Punkte]

- a) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Stichprobe aus einer  $U[0, \theta]$ -Zufallsgröße. Geben Sie den MLE für diese Verteilungsfamilie an. Schreiben Sie dazu die gemeinsame Dichtefunktion exakt auf und maximieren Sie diese ohne abzuleiten.
- b) Suchen Sie eine reelle Zahl  $a$ , damit der MLE-Schätzer aus a) mit  $a$  multipliziert erwartungstreu ist (mit Beweis).
- c) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Stichprobe aus einer  $U[\theta, \theta + 1]$ -Verteilung. Geben Sie einen sinnvollen Schätzer für  $\theta > 0$  an. Überprüfen Sie diesen Schätzer auf Erwartungstreue.
- d) Untersuchen Sie, ob der Schätzer aus c) konsistent ist oder nicht.

**Aufgabe 48 [K I; Konfidenzintervalle für Proportionen]** [1+5 Punkte]

Sie werden beauftragt, als statistischer Consultant des Bundes bei der Abstimmung zur IV-Revision herauszufinden, wie gross der Anteil der Befürworter der "IV-Revision" an der gesamten Wahlbevölkerung ist. Dazu lassen Sie eine Umfrage unter 10'000 Personen durchführen. Genau 4555 Personen gaben an, dass Sie gegen die "IV-Revision" stimmen werden - der Rest ist dafür. Gehen Sie mal davon aus, dass die 10'000 Personen repräsentativ ausgewählt wurden und ehrliche Antworten gaben.

- a) Wie hoch schätzen Sie den Anteil der Befürworter der "IV-Revision"? Bitte mit mathematischer Begründung und Nennung der Methode.
- b) Geben Sie ein 95 % -KI für den Anteil der Befürworter der "IV-Revision" an. Benutzen Sie dazu den CLT.

Gehen Sie bei den Berechnungen von einer unendlich grossen Gesamtpopulation aus.