

# Übungsblatt 10 zur Vorlesung

## ”Statistische Methoden”

### Einfache Regression

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 19, Abgabe der Lösungen: Woche 20 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 21

---

#### Must

#### Aufgabe 49 [Simulation einer Regression]

a) Sei  $x_i := i, 1 \leq i \leq 100$ , eine feste Folge von erklärenden Daten (äquidistant). Es gelte

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,$$

wobei  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 2)$  iid. Nehmen Sie  $\beta_0 = 1$  und für  $\beta_1$  nehmen Sie Ihre PN. Generieren Sie jetzt einen Vektor  $(y_i)_{i=1}^{100}$ .

b) Schätzen Sie jetzt  $\beta_0, \beta_1$  und die Varianz von  $\epsilon$  mit R, indem Sie eine OLS-Schätzung machen.

c) Vertauschen Sie die Rollen von  $x$  und  $y$  und machen Sie nochmals eine OLS-Regression. Vergleichen Sie die Resultate von b) und c).

#### Standard

#### Aufgabe 50 [Aufspaltung der Variation in den $y$ ] [3 Punkte]

Beweisen Sie mit der Notation aus 7.1.2, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

#### Aufgabe 51 [Erwartungstreue Schätzer bei OLS] [2+1 Punkte]

Beweisen Sie, dass die Schätzer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

erwartungstreu sind. Tipps: Schätzer werden normalerweise auf der Ebene der Stichproben definiert. Um die Erwartungstreue zu überprüfen, müssen Sie auf die Ebene der Zufallsgrößen wechseln ( $y$  durch  $Y$  ersetzen) und mit Formel (7.1) arbeiten.

#### Aufgabe 52 [ $y_i = \beta_0 + \epsilon_i$ ] [1+1+1 Punkte]

Das Modell

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i$$

ist offenbar ein Spezialfall von (7.1). Berechnen Sie in diesem Modell die OLS-Schätzung von  $\beta_0$  und die ML-Schätzungen von  $\beta_0$  und  $\sigma^2 := V[\epsilon_i]$ .

**Aufgabe 53** [**Testen, ob  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_1 = PN$** ] [1+2 Punkte]

Testen Sie in der Situation von Aufgabe 49 (mit den dort erzeugten Daten), ob

a)  $\beta_1 = 0$  und

b)  $\beta_1 = PN$ , wobei das  $PN$  das richtige (und uns in der Simulation ja bekannte)  $\beta_1$  ist.

Wir geben hier kein Signifikanzniveau vor. Geben Sie den P-Wert an, d.h. sagen Sie, bis zu welchem Signifikanzniveau die  $\mathcal{H}_0$ -Hypothese noch aufrecht erhalten wird.

**Honours**

**Aufgabe 54** [**Test, ob  $\beta_0 = 0$** ] [5 Punkte]

In 7.1.3 haben wir einen Test entwickelt, ob  $\beta_1 = 0$  oder nicht. Entwickeln Sie jetzt mit analogen Überlegungen einen Test für die Frage ob  $\beta_0 = 0$  oder nicht.