

Übungsblatt 10 zur Vorlesung

”Statistische Methoden”

Einfache Regression

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 19, Abgabe der Lösungen: Woche 20 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 21

Must

Aufgabe 49 [Simulation einer Regression]

a) Sei $x_i := i, 1 \leq i \leq 100$, eine feste Folge von erklärenden Daten (äquidistant). Es gelte

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,$$

wobei $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 2)$ iid. Nehmen Sie $\beta_0 = 1$ und für β_1 nehmen Sie Ihre PN. Generieren Sie jetzt einen Vektor $(y_i)_{i=1}^{100}$.

b) Schätzen Sie jetzt β_0, β_1 und die Varianz von ϵ mit R, indem Sie eine OLS-Schätzung machen.

c) Vertauschen Sie die Rollen von x und y und machen Sie nochmals eine OLS-Regression. Vergleichen Sie die Resultate von b) und c).

Standard

Aufgabe 50 [Aufspaltung der Variation in den y] [3 Punkte]

Beweisen Sie mit der Notation aus 7.1.2, dass gilt

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Aufgabe 51 [Erwartungstreue Schätzer bei OLS] [2+1 Punkte]

Beweisen Sie, dass die Schätzer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

erwartungstreu sind. Tipps: Schätzer werden normalerweise auf der Ebene der Stichproben definiert. Um die Erwartungstreue zu überprüfen, müssen Sie auf die Ebene der Zufallsgrößen wechseln (y durch Y ersetzen) und mit Formel (7.1) arbeiten.

Aufgabe 52 [$y_i = \beta_0 + \epsilon_i$] [1+1+1 Punkte]

Das Modell

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i$$

ist offenbar ein Spezialfall von (7.1). Berechnen Sie in diesem Modell die OLS-Schätzung von β_0 und die ML-Schätzungen von β_0 und $\sigma^2 := V[\epsilon_i]$.

Aufgabe 53 [**Testen, ob $\beta_1 = 0$, $\beta_1 = PN$**] [1+2 Punkte]

Testen Sie in der Situation von Aufgabe 49 (mit den dort erzeugten Daten), ob

a) $\beta_1 = 0$ und

b) $\beta_1 = PN$, wobei das PN das richtige (und uns in der Simulation ja bekannte) β_1 ist.

Wir geben hier kein Signifikanzniveau vor. Geben Sie den P-Wert an, d.h. sagen Sie, bis zu welchem Signifikanzniveau die \mathcal{H}_0 -Hypothese noch aufrecht erhalten wird.

Honours

Aufgabe 54 [**Test, ob $\beta_0 = 0$**] [5 Punkte]

In 7.1.3 haben wir einen Test entwickelt, ob $\beta_1 = 0$ oder nicht. Entwickeln Sie jetzt mit analogen Überlegungen einen Test für die Frage ob $\beta_0 = 0$ oder nicht.