Übungsblatt 11 zur Vorlesung

"Statistische Methoden" - freiwilliger Teil

Rechnen mit Matrizen, Multivariate Normalverteilung

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 20, Abgabe der Lösungen: Woche 21 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 22 (Dienstag und Mittwoch)

Must

Aufgabe 55 [Idempotente Matrizen I]

Zeigen Sie mit der Notation aus Kapitel 6:

a) M^z ist idempotent.

b) $M^z\mathbf{1} = \vec{0}$ und damit auch $\mathbf{1}^t M^z = (\vec{0})^t$

c) unter Verwendung von M^z: $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) = 0$

d) $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = (\vec{x})^t M^z \vec{x}$

e) $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = (\vec{x})^t M^z \vec{y}$

Aufgabe 56 [Idempotente Matrizen II]

Zeigen Sie mit der Notation aus Kapitel 6:

a) H und M sind symmetrisch und idempotent

b) $HA = A$

c) H und M sind orthogonal zueinander, das heisst, es gilt: $HM = 0$.

Standard

Aufgabe 57 [Rang(H) = k] [4 Punkte]

Sei A eine $(n \times k)$-Matrix, $n \geq k$ und $\text{Rang}(A) = k$ (voller Rang). Zeigen Sie: $H := A(A^tA)^{-1}A^t$ hat auch Rang k.

Aufgabe 58 [Idempotente Matrizen III] [1 Punkt]

Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte von idempotenten Matrizen sind entweder 0 oder 1.

b) Für idempotente, symmetrische Matrizen A gilt: $\text{Rang}(A) = \text{tr}(A)$.

Aufgabe 59 [Niveaulinien und Kovarianz] [4 Punkte]

Betrachten wir die Dichte einer bivariaten Normalverteilung $\text{MVN}_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$. Was lässt sich über die Niveaulinien aussagen. Betrachten Sie insbesondere die Fälle

a) $\mu = (1, 1)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\mu = (0, 0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\mu = (0, 0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\mu = (0, 0)^t$ und

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und machen Sie jeweils eine Skizze dazu.

Honours

Aufgabe 60 [Randdichten der Multivariaten Normalverteilung] [2 Punkte]

Sei $\mathbf{X}$ eine $\text{MVN}_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$-Zufallsgrösse. Dabei sei

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie ist die Dichte der ersten Komponente X_1 dieses zweidimensionalen Zufallsvektors (mit Beweis bitte)?