

# Übungsblatt 1 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

## Repetition Wahrscheinlichkeitstheorie aus WTS

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 11

---

### Must

#### Aufgabe 1 [Überblick über die wichtigsten Zufallsgrößen]

Sie haben bereits vor längerer Zeit die Vlsg WTS bei mir besucht. In der WT wird die Anschauung eher zu kurz kommen. Damit Ihnen die wichtigsten Verteilungen gegenwärtig sind, lesen Sie bitte in WTS Kapitel 4, und zwar dort Teil 4.2 und Teil 4.3 bis und mit 4.3.5. durch.

### Standard

Bei den folgenden Aufgaben wird (noch) nicht verlangt, dass Sie allfällige Beweise völlig exakt führen mit Resultaten aus der WT (die Sie ja eh noch nicht haben). Lösen Sie die unteren Aufgaben auf dem Niveau und mit ausschliesslichem Vorwissen aus WTS. Sie dürfen Resultate aus dem WTS-Skript (gerne mit Verweis) ohne weiteren Beweis übernehmen.

#### Aufgabe 2 [Z-Transformation] [2 Punkte]

$X$  sei  $\mathcal{N}(4, 49)$ -verteilt. Berechnen Sie  $P[X \in [5, 9]]$ .

#### Aufgabe 3 [Zufallsgrößen und Erwartungswerte I] [2 Punkte]

Geben Sie die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse  $X$  an, welche *gleichzeitig* folgende Eigenschaften hat:

1.  $f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$ .
2. Median von  $X$  sei 2
3.  $E[|X|] < \infty$ .
4.  $P[X \leq 0] = 0$ .

Sie dürfen dazu eine Zufallsgrösse selber erfinden und müssen nicht eine aus WTS-Kapitel 4 nehmen (können aber).

#### Aufgabe 4 [Zufallsgrößen und Erwartungswerte II] [1+1+1 Punkte]

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse,  $Y$  eine  $\text{Exp}(3)$ -Zufallsgrösse und  $Z$  eine  $U[3, 5]$ -Zufallsgrösse.  $X, Y, Z$  seien jeweils unabhängig voneinander.

- a) Berechnen Sie  $E[X + Y + Z]$ .
- b) Brauchen Sie für a) die Unabhängigkeit?
- c) Berechnen Sie auch  $V[X + Y + Z]$ .

**Aufgabe 5 [Zufallsgrößen und Erwartungswerte III]** [1+1+1+1+1 Punkte]

Die Zufallsgröße  $X$  nehme nur Werte in der Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  an:  $P[X = i] =: p_i$ . Es gelte  $p_0 = 2p_1; p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ . Berechnen Sie

- a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$
- b)  $E[X]$
- c)  $V[X]$
- d)  $E[(1 + X^2)^{-1}]$
- e) die Zahl  $a$ , sodass  $E[(X - a)^2]$  minimal wird (sie dürfen dazu Resultate aus WTS-Vlsg od WTS-Ue benutzen)

**Honours**

**Aufgabe 6 [ein kleines Limesresultat]** [2+2 Punkte]

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -Zufallsgröße.

- a) Beweisen Sie:  $E[e^X] \geq 1$ .
- b) Beweisen Sie:  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} E[e^X] = \infty$ . Mit der richtigen Idee kann man das auf 2 Zeilen beweisen.