Übungsblatt 1 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Repetition Wahrscheinlichkeitstheorie aus WTS

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 08, Abgabe der Lösungen: Woche 09 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 10

Must

Aufgabe 1 [Überblick über die wichtigsten Zufallsgrössen]

Sie haben bereits vor längerer Zeit die Vlsg WTS bei mir besucht. In der WT wird die Anschauung eher zu kurz kommen. Damit Ihnen die wichtigsten Verteilungen gegenwärtig sind, lesen Sie bitte in WTS Kapitel 4, und zwar dort Teil 4.2 und Teil 4.3 bis und mit 4.3.5. durch.

Standard

Bei den folgenden Aufgaben wird (noch) nicht verlangt, dass Sie allfällige Beweise völlig exakt führen mit Resultaten aus der WT (die Sie ja eh noch nicht haben). Lösen Sie die unteren Aufgaben auf dem Niveau und mit ausschliesslichem Vorwissen aus WTS. Sie dürfen Resultate aus dem WTS-Skript (gerne mit Verweis) ohne weiteren Beweis übernehmen.

Aufgabe 2 [Z-Transformation] [2 Punkte]

X sei $\mathcal{N}(4, 49)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [5, 9]]$.

Aufgabe 3 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte I] [2 Punkte]

Geben Sie die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse X an, welche *gleichzeitig* folgende Eigenschaften hat:

1. $f(x) \geq 0 \;\; \forall x > 0$.
2. Median von X sei 2
3. $E[|X|] < \infty$.
4. $P[X \leq 0] = 0$.

Sie dürfen dazu eine Zufallsgrösse selber erfinden und müssen nicht eine aus WTS-Kapitel 4 nehmen (können aber).

Aufgabe 4 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte II] [1+1+1 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(3, 4)$-Zufallsgrösse, Y eine Exp(3)-Zufallsgrösse und Z eine $U[3, 5]$-Zufallsgrösse. X, Y, Z seien jeweils unabhängig voneinander.

a) Berechnen Sie $E[X + Y + Z]$.
b) Brauchen Sie für a) die Unabhängigkeit?
c) Berechnen Sie auch $V[X + Y + Z]$.

Aufgabe 5 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte III] [1+1+1+1+1 Punkte]

Die Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ an: $P[X = i] =: p_i$. Es gelte $p_0 = 2p_1; p_1 = p_2 = p_3 = p_4$. Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

b) $E[X]$

c) $V[X]$

d) $E[(1 + X^2)^{-1}]$

e) die Zahl a, sodass $E[(X - a)^2]$ minimal wird (sie dürfen dazu Resultate aus WTS-Vlsg od WTS-Ue benutzen)

Honours

Aufgabe 6 [ein kleines Limesresultat] [2+2 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-Zufallsgrösse.

a) Beweisen Sie: $E[e^X] \geq 1$.

b) Beweisen Sie: $\lim_{\sigma \to \infty} E[e^X] = \infty$. Mit der richtigen Idee kann man das auf 2 Zeilen beweisen.