Übungsblatt 2 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Experiment, Ereignisse, σ-Algebren

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 12

Must

Aufgabe 7 [Ereignisraum]

Geben Sie zu jedem der 6 Fälle von Ereignisräumen aus 1.1 ein *neues* Beispiel aus der "realen Welt" an, welches man "sinnvollerweise" mit dem jeweiligen Fall modelliert. Besprechung von Grenzfällen erwünscht!

Aufgabe 8 [Ist Potenzmenge eine σ-Algebra?]

Untersuchen Sie, ob die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.

Standard

Aufgabe 9 [$\limsup$ und $\liminf$ von Mengen] [1 Punkt]

Untersuchen Sie, ob allgemein $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$ oder umgekehrt oder weder noch.

Aufgabe 10 [$\limsup, \liminf$] [1 Punkt]

Zeigen Sie:

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$$

Aufgabe 11 [Konvergenz von monotonen Folgen von Ereignissen] [2 Punkte]

Zeigen Sie für $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von Ω, dass

a) Falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$, dann konvergiert die Folge $A_1, A_2, \ldots$. Wogegen?

b) Falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, dann konvergiert die Folge $A_1, A_2, \ldots$. Wogegen?

Aufgabe 12 [von Z erzeugte σ-Algebra] [4 Punkte]

Sei Z ein Teilmengensystem von Ω. Wir nennen dann $\sigma(Z)$ die von Z erzeugte σ-Algebra. Es ist dies die kleinste σ-Algebra, die Z beinhaltet. Zeigen Sie, dass eine derartige (eindeutige) σ-Algebra existiert, genauer: Zu jedem Teilmengensystem Z von Ω existiert eine eindeutige σ-Algebra $\sigma(Z)$ derart, dass

a) $Z \subseteq \sigma(Z)$

b) $\forall$ σ-Algebra U mit $Z \subseteq U$ gilt $\sigma(Z) \subseteq U$.

Aufgabe 13 [Vereinigung zweier σ-Algebren] [4 Punkte]

Von der Lösung von Aufgabe 12 wissen wir, dass Schnittmengen von σ-Algebren wieder σ-Algebren sind. Finden Sie ein Gegenbeispiel dass zeigt, dass Vereinigungen zweier σ-Algebren nicht zwingend σ-Algebren sein müssen. Geben Sie dazu $\Omega, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ an.

Honours

Aufgabe 14 [Urbild einer σ-Algebra] [3 Punkte]

Seien Ω_1, Ω_2 Ereignisräume und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf diesem Ereignisraum Ω_2. Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}_2\}$$

ist eine σ-Algebra auf Ω_1.