Übungsblatt 3 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 11, Abgabe der Lösungen: Woche 12 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 13 (Freitagsgruppe am 9.4.)

Must

Aufgabe 15 [elementare Eigenschaften von P]

Beweisen Sie Lemma 1.8.

Standard

Aufgabe 16 [Konvergenz von Mengen und Stetigkeit von P] [4 Punkte]

Angenommen, Sie definieren die Konvergenz von Mengen A_n gegen eine Menge A in der folgenden Weise: A_n konvergiert gegen $A := \{\omega | \exists N_\omega : \omega \in A_n \forall n \geq N_\omega\}$ (solch eine Menge A gibt es für jede Folge von Mengen!). Zu welcher Konvergenz ist diese Definition äquivalent? Geben Sie ein konkretes Beispiel an, welches zeigt, dass mit dieser Definition Satz 1.10 (Stetigkeit von P) nicht mehr stimmt.

Aufgabe 17 [Linearkombinationen von Wahrscheinlichkeiten] [4 Punkte]

Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeiten auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $0 \leq \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$P[A] := \alpha P_1[A] + (1 - \alpha) P_2[A]$$

auch eine Wahrscheinlichkeit ist.

Aufgabe 18 [Straffheit (tightness) von P] [4 Punkte]

Sei P eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie: für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$P[K] > 1 - \epsilon.$$

Diese Eigenschaft nennt man Straffheit; sie ist zentral wichtig in der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie (sog. Satz von Prohorov).