Übungsblatt 4 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15

Must

Aufgabe 19 [absolut stetige Wahrscheinlichkeiten]

Beweisen Sie Korollar 1.21

Aufgabe 20 [kleine Hängepartie Beweis Satz 1.19]

Zeigen Sie: wenn $P[C] = 1$, dann gilt für alle Borel-Mengen B: $P[B \cap C] = P[B]$.

Aufgabe 21 [kleine Hängepartie aus WTS]

Zeigen Sie: es existiert keine Uniform-Wahrscheinlichkeit auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$.

Standard

Aufgabe 22 [fast sicher, Nullmengen] [4 Punkte]

Sei $P[A_i] = 1$ für alle i, dann gilt auch

$$P[\cap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1.$$

Aufgabe 23 [bedingte Wahrscheinlichkeiten, false positive] [4 Punkte]

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, ohne Symptome, Brustkrebs hat, ist 1 %. Hat nun eine dieser Frauen in der Tat Brustkrebs, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Mammographiebefundes 80 % (positiv heisst hier, dass der medizinische Apparat Brustkrebs anzeigt). Falls eine dieser Frauen in der Tat keinen Brustkrebs hat, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes 10 %. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positivem Befund tatsächlich Brustkrebs hat? [Zahlen sind zur Zeit (2006) etwa realistisch]

Aufgabe 24 [bedingte Wahrscheinlichkeiten] [4 Punkte]

Sei P die uniforme Verteilung auf einem endlichen Ω. Sei A eine Teilmenge von Ω. Zeigen Sie: $P[\ .\ |A]$ ist eine uniforme Verteilung auf A.

Honours

Aufgabe 25 [Ein- und Ausschlussprinzip] [4 Punkte]

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $B_J := \cap_{j \in J} A_j$. Für $k \geq 1$ definieren wir $S_k := \sum_{|J|=k} P[B_J]$. Dann gilt das sogenannte "Ein- und Ausschlussprinzip":

$$P[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k.$$

Schreiben Sie noch die beiden Formeln für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ explizit auf und machen Sie anschauliche Diagramme dazu, welche die Formel illustrieren. Beweisen Sie das "Ein- und Ausschlussprinzip".