

# Übungsblatt 4 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

## Wahrscheinlichkeit $P$

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 13 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 14

---

### Must

#### Aufgabe 19 [absolut stetige Wahrscheinlichkeiten]

Beweisen Sie Korollar 1.21

#### Aufgabe 20 [kleine Hängepartie Beweis Satz 1.19]

Zeigen Sie: wenn  $P[C] = 1$ , dann gilt für alle Borel-Mengen  $B$ :  $P[B \cap C] = P[B]$ .

#### Aufgabe 21 [kleine Hängepartie aus WTS]

Zeigen Sie: es existiert keine Uniform-Wahrscheinlichkeit auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$ .

### Standard

#### Aufgabe 22 [fast sicher, Nullmengen] [4 Punkte]

Sei  $P[A_i] = 1$  für alle  $i$ , dann gilt auch

$$P[\cap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1.$$

#### Aufgabe 23 [bedingte Wahrscheinlichkeiten, false positive] [4 Punkte]

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, ohne Symptome, Brustkrebs hat, ist 1 %. Hat nun eine dieser Frauen in der Tat Brustkrebs, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Mammographiebefundes 80 % (positiv heisst hier, dass der medizinische Apparat Brustkrebs anzeigt). Falls eine dieser Frauen in der Tat keinen Brustkrebs hat, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes 10 %. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positivem Befund tatsächlich Brustkrebs hat? [Zahlen sind zur Zeit (2006) etwa realistisch]

#### Aufgabe 24 [bedingte Wahrscheinlichkeiten] [4 Punkte]

Sei  $P$  die uniforme Verteilung auf einem endlichen  $\Omega$ . Sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\Omega$ . Zeigen Sie:  $P[\cdot | A]$  ist eine uniforme Verteilung auf  $A$ .

### Honours

#### Aufgabe 25 [Ein- und Ausschlussprinzip] [4 Punkte]

Seien  $A_1, \dots, A_n$  Ereignisse.  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $B_J := \cap_{j \in J} A_j$ . Für  $k \geq 1$  definieren wir  $S_k := \sum_{|J|=k} P[B_J]$ . Dann gilt das sogenannte "Ein- und Ausschlussprinzip":

$$P[\cup_{i=1}^n A_i] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k.$$

Schreiben Sie noch die beiden Formeln für den Fall  $n = 2$  und  $n = 3$  explizit auf und machen Sie anschauliche Diagramme dazu, welche die Formel illustrieren. Beweisen Sie das "Ein- und Ausschlussprinzip".