

# Übungsblatt 5 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

## Allgemeine Masse

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 13, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15

---

### Must

#### Aufgabe 26 [alternative Definition "σ-endlich"]

Zeigen Sie: ein Mass  $\mu$  ist genau dann  $\sigma$ -endlich, wenn es eine abzählbare Folge  $(E_i)_{i \geq 1}$  von disjunkten Mengen gibt, sodass  $E = \cup E_i$  mit  $\mu[E_i] < \infty$  für alle  $i \geq 1$ .

### Standard

#### Aufgabe 27 [endliche Masse und Wahrscheinlichkeiten] [3 Punkte]

Zeigen Sie: jedes endliche Mass kann mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeit geschrieben werden.

#### Aufgabe 28 [Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten und Massen] [3 Punkte]

Formulieren Sie - wo sinnvoll - das Pendant zu Lemma 1.8 im Fall von Massen statt Wahrscheinlichkeiten und beweisen Sie die neu gewonnenen Aussagen. Unterscheiden Sie falls nötig den Fall wo ein Ausdruck endlich oder unendlich wird.

#### Aufgabe 29 [ $A_n \downarrow \phi$ ] [3 Punkte]

Bei Wahrscheinlichkeiten gilt (Satz 1.9 d):

$$A_n \downarrow \phi \Rightarrow P[A_n] \rightarrow 0.$$

Gilt ein analoges Resultat auch für allgemeine Masse? Falls ja, beweisen Sie es - falls nein: suchen Sie ein einfaches (!) Gegenbeispiel.

#### Aufgabe 30 [ $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ ] [3 Punkte]

Zeigen Sie:  $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

### Honours

#### Aufgabe 31 [Cantor-Funktion] [4 Punkte]

Zeigen Sie: die Cantor-Funktion ist stetig.