

# Übungsblatt 6 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

## Zufallsgrößen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 15, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 17

---

### Must

#### Aufgabe 32 [ $X$ und $|X|$ ]

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $|X|$  eine Zufallsgröße. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass dann  $X$  nicht zwingend eine Zufallsgröße sein muss (die Umkehrung ist aber richtig:  $X$  Zufallsgröße, dann auch  $|X|$  Zufallsgröße; kommt noch in Vlsg).

### Standard

#### Aufgabe 33 [einfaches Beispiel zur mb] [2+2+2+2 Punkte]

Sei  $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $\mathcal{F} := \sigma(\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\})$ .

- Geben Sie alle Elemente von  $\mathcal{F}$  an.
- Sei die Funktion  $X$  folgendermassen definiert:

$$X(\omega) := \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 7 & \text{falls } \omega \in \{5, 6\}. \end{cases}$$

Ist  $X$  auch mb bzgl  $\mathcal{F}$  und damit eine ZG auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ?

- Geben Sie ein Beispiel einer Funktion auf  $\Omega$  an, die nicht mb ist bzgl  $(\Omega, \mathcal{F})$ .
- Geben Sie ein  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  an, so dass jedem Ereignis entweder 0 oder 1 zugewiesen wird.

#### Aufgabe 34 [ $P_X$ ] [4 Punkte]

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $X$  eine Zufallsgröße auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie: durch

$$P_X(B) := P[X^{-1}(B)] := P[\{\omega | X(\omega) \in B\}]$$

wird eine Wahrscheinlichkeit auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  definiert.

### Honours

#### Aufgabe 35 [Verknüpfung von messbaren Abbildungen] [2 Punkte]

Seien  $(E_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  und  $(E_3, \mathcal{E}_3)$  drei Messräume. Seien  $f : E_1 \rightarrow E_2$  und  $g : E_2 \rightarrow E_3$  jeweils  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ -messbare bzw  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ -messbare Abbildungen. Zeigen Sie:

$$h := g \circ f : E_1 \rightarrow E_3$$

ist  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ -messbar.