

Übungsblatt 7 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufallsgrößen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 15, Abgabe der Lösungen: Woche 16 (bis Freitag 18. April, 16.15 Uhr - **besser 2 Tage vorher, da man eventuell keinen Zugang zum Institut hat**), Besprechung: Woche 17

Must

Aufgabe 36 [alternative Definition Zufallsgröße I]

In der WTS-Vlsg haben wir in WTS-Definition 2.1 eine Zufallsgröße auf (Ω, \mathcal{A}, P) definiert als eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$ für alle reellen a . Zeigen Sie, dass man statt dessen auch fordern kann $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$ oder $\{\omega \in \Omega | X(\omega) > a\} \in \mathcal{A}$ oder $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie dies durch direktes beweisen und nicht durch Einsatz von WT-Definition 2.4.

Standard

Aufgabe 37 [alternative Definition Zufallsgröße II] [3 Punkte]

Zeigen Sie, dass WTS-Definition 2.1 und WT-Definition 2.4 gleichwertig sind (Vervollständigung des Beweises aus der Vlsg).

Aufgabe 38 [$\sigma(X)$] [3 Punkte]

Aus der Honours-Aufgabe von Blatt 2 wissen wir, dass das Urbild unter einer Abbildung f einer σ -Algebra immer selber auch eine σ -Algebra ist (selbst wenn f nicht messbar ist). Dies haben wir in Lemma 2.9 nochmals notiert für den Fall, dass $f (= X)$ eine Zufallsgröße ist ($\sigma(X)$ ist eine σ -Algebra). Dann haben wir noch notiert, dass X auf (Ω, \mathcal{A}, P) nur dann eine Zufallsgröße ist, wenn $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$. Zeigen Sie jetzt noch: $\sigma(X)$ ist die kleinste σ -Algebra, bezüglich der X messbar ist, also eine Zufallsgröße ist.

Aufgabe 39 [Algebraische Operationen von Zufallsgrößen I] [3 Punkte]

Seien X und Y beide Zufallsgrößen und A ein Ereignis. Zeigen Sie, dass

$$Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } \omega \in A \\ Y(\omega) & \text{falls } \omega \in A^c. \end{cases}$$

selber auch eine Zufallsgröße ist.

Aufgabe 40 [Algebraische Operationen von Zufallsgrößen II] [3 Punkte]

Zeigen Sie: falls X, Y Zufallsgrößen sind, dann sind $\{X \leq Y\}$, $\{X < Y\}$ und $\{X = Y\}$ Ereignisse.

Honours

Aufgabe 41 [Random Walk und Filtration] [4 Punkte]

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. $T := \{0, 1, 2, 3\}$ sei eine Zeitmenge. $(X_i)_{i=1}^3$ seien iid $\text{Be}(p)$ -Zufallsgrößen mit $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$ (dies brauchen Sie übrigens *nicht*). $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in T$. Geben Sie sinnvoll das Ω und eine Filtration $(\mathcal{A}_i)_{i=0}^3$ derart an, dass $\mathcal{A}_i \subsetneq \mathcal{A}_j$ wo $i < j$. S_n muss dabei stets $\mathcal{A}_n - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar sein.