Übungsblatt 7 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufallsgrössen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 18

Must

Aufgabe 36 [alternative Definition Zufallsgrösse I]

In der WTS-Vlsg haben wir in WTS-Definition 2.1 eine Zufallsgrösse auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert als eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$ für alle reellen a. Zeigen Sie, dass man statt dessen auch fordern kann $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$ oder $\{\omega \in \Omega | X(\omega) > a\} \in \mathcal{A}$ oder $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie dies durch direktes beweisen und nicht durch Einsatz von WT-Definition 2.4.

Standard

Aufgabe 37 [alternative Definition Zufallsgrösse II] [3 Punkte]

Zeigen Sie, dass WTS-Definition 2.1 und WT-Definition 2.4 gleichwertig sind (Vervollständigung des Beweises aus der Vlsg).

Aufgabe 38 [$\sigma(X)$] [3 Punkte]

Aus der Honours-Aufgabe von Blatt 2 wissen wir, dass das Urbild unter einer Abbildung f einer σ-Algebra immer selber auch eine σ-Algebra ist (selbst wenn f nicht messbar ist). Dies haben wir in Lemma 2.9 nochmals notiert für den Fall, dass f $(= X)$ eine Zufallsgrösse ist ($\sigma(X)$ ist eine σ-Algebra). Dann haben wir noch notiert, dass X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nur dann eine Zufallsgrösse ist, wenn $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$. Zeigen Sie jetzt noch: $\sigma(X)$ ist die kleinste σ-Algebra, bezüglich der X messbar ist, also eine Zufallsgrösse ist.

Aufgabe 39 [Algebraische Operationen von Zufallsgrössen I] [3 Punkte]

Seien X und Y beide Zufallsgrössen und A ein Ereignis. Zeigen Sie, dass

$$Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } \omega \in A \\ Y(\omega) & \text{falls } \omega \in A^c. \end{cases}$$

selber auch eine Zufallsgrösse ist.

Aufgabe 40 [Algebraische Operationen von Zufallsgrössen II] [3 Punkte]

Zeigen Sie: falls X, Y Zufallsgrössen sind, dann sind $\{X \leq Y\}$, $\{X < Y\}$ und $\{X = Y\}$ Ereignisse.

Honours

Aufgabe 41 [Random Walk und Filtration] [4 Punkte]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $T := \{0, 1, 2, 3\}$ sei eine Zeitmenge. $(X_i)_{i=1}^3$ seien iid Be(p)-Zufallsgrössen mit $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$ (dies brauchen Sie übrigens *nicht*). $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in T$. Geben Sie sinnvoll das Ω und eine Filtration $(\mathcal{A}_i)_{i=0}^3$ derart an, dass $\mathcal{A}_i \subsetneqq \mathcal{A}_j$ wo $i < j$. S_n muss dabei stets $\mathcal{A}_n - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sein.