

# Übungsblatt 8 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

## Zufallsgrößen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag 25. April, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 18

---

### Must

#### Aufgabe 42 [monotone Abbildung und Borel-Messbarkeit]

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Zeigen Sie: wenn  $f$  monoton ist, dann ist  $f$  auch  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mb.

### Standard

#### Aufgabe 43 [Verteilungsfunktion von $X^+$ und $X^-$ ] [4 Punkte]

$X$  habe Verteilungsfunktion  $F$ . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X^+$  und  $X^-$ .

#### Aufgabe 44 [mehrdimensionale ZG] [4 Punkte]

Sei  $(X_1, X_2)$  ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion  $F$ . Zeigen Sie für  $a_1 \leq b_1$  und  $a_2 \leq b_2$ :

$$P[a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2] = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

#### Aufgabe 45 [elementare Eigenschaften von $F^{-1}$ ] [4 Punkte]

Sei  $F^{-1}$  die Inverse von  $F$  mit Definition:

$$F^{-1}(x) := \inf\{t : F(t) \geq x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Zeigen Sie:

- Für alle  $(x, t)$  gilt  $F^{-1}(x) \leq t \Leftrightarrow x \leq F(t)$ .
- $F^{-1}$  ist monoton wachsend und links-stetig.
- Falls  $F$  stetig ist, dann gilt  $F(F^{-1}(x)) = x$  für alle  $x \in (0, 1)$ .

### Honours

#### Aufgabe 46 [Transformation und $\sigma$ -Algebren] [3 Punkte]

Sei  $Y := g(X)$  wo  $X$  eine ZG und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Borel-Funktion. Zeigen Sie:

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X);$$

was kann man folgern, wenn auch eine Borel-Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass  $X = h(Y)$ ?