Übungsblatt 8 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Zufallsgrössen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 17, Abgabe der Lösungen: Woche 18 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 19 (Montagsgruppe) bzw Woche 20 (Freitagsgruppe)

Must

Aufgabe 42 [monotone Abbildung und Borel-Messbarkeit]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie: wenn f monoton ist, dann ist f auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mb.

Standard

Aufgabe 43 [Verteilungsfunktion von X^+ und X^-] [4 Punkte]

X habe Verteilungsfunktion F. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X^+ und X^-.

Aufgabe 44 [mehrdimensionale ZG] [4 Punkte]

Sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie für $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$:

$$P[a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2] = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Aufgabe 45 [elementare Eigenschaften von F^{-1}] [4 Punkte]

Sei F^{-1} die Inverse von F mit Definition:

$$F^{-1}(x) := \inf\{t : F(t) \geq x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Zeigen Sie:

a) Für alle (x, t) gilt $F^{-1}(x) \leq t \Leftrightarrow x \leq F(t)$.

b) F^{-1} ist monoton wachsend und links-stetig.

c) Falls F stetig ist, dann gilt $F(F^{-1}(x)) = x$ für alle $x \in (0, 1)$.

Honours

Aufgabe 46 [Transformation und σ-Algebren] [3 Punkte]

Sei $Y := g(X)$ wo X eine ZG und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-Funktion. Zeigen Sie:

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X);$$

was kann man folgern, wenn auch eine Borel-Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $X = h(Y)$?