

Übungsblatt 9 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Unabhängigkeit

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 17, Abgabe der Lösungen: Woche 18 (bis Freitag 2. Mai, 16.15 Uhr),
Besprechung: Woche 19

Must

Aufgabe 47 [$P[A] = 0, 1$ und Unabhängigkeit]

Zeigen Sie: Falls $P[A] \in \{0, 1\}$, dann ist A unabhängig von allen Ereignissen. Zeigen Sie auch: wenn A unabhängig ist von sich selbst, dann gilt $P[A] \in \{0, 1\}$.

Standard

Aufgabe 48 [Abbildung unabhängiger Zufallsgrößen] [3 Punkte]

Sei $X \amalg Y$ und g_1, g_2 je borelsch. Zeigen Sie: dann gilt auch $g_1(X) \amalg g_2(Y)$. Das Resultat gilt auch für mehr als 2 Zufallsgrößen mit praktisch gleichem Beweis.

Aufgabe 49 [Unabhängigkeit von A_i und A_i^c] [6 Punkte]

Zeigen Sie: A_1, \dots, A_n sind unabhängig genau dann wenn auch A_1^c, \dots, A_n^c unabhängig sind. Benutzen Sie Aufgabe 48.

Aufgabe 50 [$P[\cup_i A_i]$ und Unabhängigkeit] [3 Punkte]

Seien A_1, \dots, A_n unabhängig. Zeigen Sie:

$$P[\cup_{i=1}^n A_i] = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P[A_i]].$$

Benutzen Sie dazu Aufgabe 49.

Honours

Aufgabe 51 [Borel-Cantelli I und II] [4 Punkte]

Geben Sie je ein einfaches (!) Beispiel zu Borel-Cantelli I und II an.