

Übungsblatt 10 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Erwartungswert

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 20, Abgabe der Lösungen: Woche 21 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 22

Must

Aufgabe 52 [$P[X \in (-\infty, \infty)] = 1$ und $E[X] = \infty$]

Geben Sie eine Situation an, in der eine (nichtnegative) Zufallsgrösse mit Wahrscheinlichkeit 1 endliche Werte annimmt, aber einen unendlichen Erwartungswert hat. Geben Sie bitte den Wahrscheinlichkeitsraum genau an. Zur Berechnung des Erwartungswertes dürfen Sie auf die VlsG WTS zurückgreifen.

Standard

Aufgabe 53 [Wohldefiniertheit von $E[X]$ bei einfachen Zufallsgrössen] [2 Punkte]

Sei X eine einfache Zufallsgrösse. Zeigen Sie, dass die Definition von $E[X]$ nicht von der Darstellung von X abhängt.

Aufgabe 54 [Mit Kanonen auf Spatzen geschossen I, II und -III] [2+2+2 Punkte]

StochastikerInnen und AnalytikerInnen rechnen lieber mit Erwartungswerten/Integralen anstatt mit Wahrscheinlichkeiten/Massen. Benutzen Sie für die folgenden 3 Teilaufgaben als Zufallsgrössen jeweils geschickt Indikatorfunktionen, um

- mit Hilfe von Satz 4.6 (Fatou) die erste Ungleichung in Satz 1.10 zu beweisen,
- mit Hilfe von Satz 4.7 (monotone Konvergenz) Satz 1.9 b) zu beweisen und
- mit Hilfe von Satz 4.8 die σ -Additivität zu beweisen.

Übersehen Sie dabei bitte grosszügig, dass wir hier wohl 3 Zirkelschlüsse machen! Obige 3 Zusammenhänge benutzen StochastikerInnen lediglich in dem Sinne, dass man die Resultate für Erwartungswerte besser memorieren kann als die für Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 55 [Kontrast zur Positivität von Erwartungswerten] [2 Punkte]

Sowohl in 4.1, 4.2 wie auch 4.3 haben wir die Positivität des Erwartungswertes: falls $X \geq 0$, dann auch $E[X] \geq 0$. Zeigen Sie jetzt noch: falls $X \geq 0$ und $E[X] = 0$, dann muss gelten, dass $P[X = 0] = 1$.

Aufgabe 56 [Betrag innen und aussen; Monotonie in L^1] [2 Punkte]

- Sei $X \in L^1$. Zeigen Sie, dass dann $|E[X]| \leq E[|X|]$.
- Seien $X \leq Y \in L^1$. Zeigen Sie, dass dann $E[X] \leq E[Y]$.

Honours

Aufgabe 57 [Fatou, volles Programm] [4 Punkte]

Sei $Y \in L^1$ und für alle n gelte $|X_n| \leq Y$. Zeigen Sie:

$$E[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[X_n] \leq \limsup_n E[X_n] \leq E[\limsup_n X_n]$$

Welche Kette von Ungleichungen aus Kapitel 1 haben wir damit wie in Aufgabe 54 wieder erhalten?