Übungsblatt 11 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Erwartungswert, L^p, $n \to \infty$, A 62 kein Prüfungsstoff

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 20, Abgabe der Lösungen: Woche 21 (bis Freitag, 23. Mai, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 22

Must

Aufgabe 58 [$|X| = 0$ f.s. $\Rightarrow E[|X|] = 0$]

Es gelte $P[|X| = 0] = 1$. Zeigen Sie: $E[|X|] = 0$.

Standard

Aufgabe 59 [L^p, L^q wo $0 < p < q < 1$] [3 Punkte]

Untersuchen Sie die Räume L^p, L^q wo, $0 < p < q < 1$ in der WT auf Inklusionen hin.

Aufgabe 60 [Vervollständigung Beweis Satz 4.21] [3 Punkte]

Beweisen Sie vollständig: Sei $X \in L^1$. Dann gilt

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x).$$

Aufgabe 61 [Tschebyschew und Konsorten] [3 Punkte]

Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung der Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew: Sei $X \geq 0$ und g eine positive, wachsende Funktion auf $\mathbb{R}_+$. Dann gilt für alle $a > 0$,

$$P[X \geq a] \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)} \; .$$

Beweis-Tipp: Siehe Beweis WTS-Satz 5.1. Alle denkbaren, interessanten Varianten hiervon finden Sie dann in Karr in 4.4.

Aufgabe 62 [Konvergenz in Verteilung/Wahrscheinlichkeit, Ergänzung Satz 5.4] [3 Punkte]

Gemäss Satz 5.4 folgt aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit immer auch die Konvergenz in Verteilung. Die Gegenrichtung muss im Allgemeinen nicht richtig sein - schlimmer: eventuell findet die Konvergenz in Verteilung zwar statt, aber die Zufallsgrössen sind auf unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert (wir betrachten ja lediglich die Verteilungsfunktion!). Damit kann man dann die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gar nicht erst untersuchen.

Falls die Konvergenz in Verteilung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum stattfindet, und zwar gegen eine reelle Zahl (und nicht gegen eine Zufallsgrösse mit positiver Varianz), dann können wir die Gegenrichtung beweisen: Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Zufallsgrössen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, welche in Verteilung gegen eine reelle Zahl a konvergiert. Beweisen Sie: dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit gegen a.

Honours

Aufgabe 63 [Vervollständigung Beweis Satz 4.17] [4 Punkte]

Sei F eine absolut-stetige Verteilungsfunktion mit (stückweise) stetiger Dichtefunktion f. Sei g nichtnegativ und (stückweise) stetig. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int g dF = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx,$$

dabei haben wir auf der rechten Seite jetzt ein (normales) Riemann-Integral (vgl Satz 4.13).