Übungsblatt 2 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Ereignisraum und Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 39, Abgabe der Lösungen: Woche 40 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 41

Must

Aufgabe 8 [P]

Zur Modellierung eines fairen Würfels *wählen* wir für ein Elementarereignis $P[\{i\}] := 1/6, 1 \leq i \leq 6$. Zeigen Sie unter Begründung jedes einzelnen Schrittes, dass dann

$$P[\{2,3\}] = 1/3$$

und

$$P[\Omega] = 1.$$

Aufgabe 9 [P]

Ein Würfel sei verfälscht. Die Sechs, die Fünf und die Zwei sind alle gleich wahrscheinlich, nämlich doppelt so wahrscheinlich wie die Vier. Die restlichen beiden Augenzahlen sind anderthalbmal so wahrscheinlich wie die Vier.

a) Bestimmen Sie die einzelnen Wahrscheinlichkeiten.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Primzahl,
c) eine Zahl ≥ 3 gewürfelt?

Standard

Aufgabe 10 [Ereignisse] [2.5 Punkte]

A, B, C seien drei Ereignisse. Wie lässt sich (wie in der ersten Kolonne der Tabelle in 1.4.1) symbolisch folgendes schreiben:
(i) Nur A tritt ein.
(ii) Alle drei Ereignisse treten ein.
(iii) Mindestens eines der drei Ereignisse tritt ein.
(iv) Genau eines der Ereignisse tritt ein.
(v) Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

Aufgabe 11 [nützliche Eigenschaften von P (Lemma 1.3)] [4 Punkte]

Beweisen Sie folgende Aussagen, dabei sind $A, B \in \mathcal{A}$:
a) Sei $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine abzählbare Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$, dann muss gelten:

$$P[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

b) $A \subset B \Rightarrow P[B] = P[A] + P[B \backslash A]$
c) $A \subset B \Rightarrow P[A] \leq P[B]$
d) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

Aufgabe 12 [2 Punkte]

A, B, C seien drei Ereignisse. Beweisen Sie, dass

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[B \cap C] - P[A \cap C] + P[A \cap B \cap C].$$

Aufgabe 13 [1 Punkte]

Die Ereignisse E und F seien so, dass $P[E \cap F] = P[E]P[F]$ gilt. Beweisen Sie, dass dann

$$P[E^c \cap F^c] = P[E^c]P[F^c].$$

Aufgabe 14 [1+1 Punkte]

Wie oft darf man einen unverfälschten Würfel höchstens werfen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei nie eine Sechs fällt a) mindestens 5%, b) mindestens 0.1% sein soll?

Honours

Aufgabe 15 [3. Eigenschaft der Wahrscheinlichkeit P, Variante "light"] [3 Punkte]

$(A_n)_{n=1}^{k}$ seien disjunkte Ereignisse, $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass wenn für disjunkte Ereignisse A, B allgemein gilt

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B],$$

dann muss auch gelten, dass

$$P[\bigcup_{n=1}^{k} A_n] = \sum_{n=1}^{k} P[A_n],$$

vgl. Definition 1.2 c). Benutzen Sie *nicht* Eigenschaft c) von Definition 1.2.