Übungsblatt 3 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 40, Abgabe der Lösungen: Woche 41 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 42

Must

Aufgabe 16 [Unabhängigkeit von Ereignissen]

Vergleichen Sie diese Aufgabe mit Aufgabe 13. A und B seien derart, dass $P[A \cap B] = P[A]P[B]$, d.h. die Ereignisse A und B seien unabhängig voneinander. Zeigen Sie, dass dann auch A^c und B unabhängig voneinander sind (analog natürlich A und B^c).

Aufgabe 17 [Unabhängigkeit von Ereignissen]

Von den 240 HörerInnen einer Vorlesung studieren 127 Biologie, 66 Geographie und 47 andere Fächer. Eine Person wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit studiert diese Biologie und ist ein Sonntagskind? (Welche plausiblen Annahmen müssen Sie treffen?)

Standard

Aufgabe 18 [bedingte Wahrscheinlichkeiten] [1+1+1 Punkte]

A, B und C seien 3 Ereignisse mit $P[A] > 0, P[A \cap B] > 0$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B|A]P[C|A \cap B].$$

Wie lautet eine entsprechende Formel für n Mengen? Beweisen Sie die allgemeine Formel mit Hilfe der Induktionsmethode. Wo wurde diese Formel in der Mittelschule (Gymnasium) benutzt?

Aufgabe 19 [bedingte Wahrscheinlichkeiten] [2 Punkte]

Aus der Menge der Zahlen $\{31, 32, \ldots, 50\}$ wird eine Zahl zufällig ausgewählt. Wir betrachten die folgenden Ereignisse: A: "die Zahl ist ungerade", B: "die Zahl ist durch 7 teilbar", C: "die Zahl ist eine Primzahl". Berechnen Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten:

a) $P[A|B]$, b) $P[B|A^c]$, c) $P[C|A]$, d) $P[A|C]$.

Ein Resultat ist in einem gewissen Sinn speziell. Geben Sie eine Erklärung.

Aufgabe 20 [FTW] [3 Punkte]

An einer Hochschule findet eine schriftliche Prüfung statt. Nur die Hälfte der Prüflinge beachten dabei die Lösungshinweise. Nach der Korrektur werden die Geprüften in vier Kategorien eingeteilt: I : sehr gut; II: gut; III: genügend; IV: ungenügend. Es sind $\frac{1}{8}$ der Personen in Gruppe I, $\frac{1}{8}$ in Gruppe II, $\frac{1}{2}$ in Gruppe III und $\frac{1}{4}$ in Gruppe IV. Von den Personen, die die Lösungshinweise nicht beachtet haben, sind $\frac{1}{10}$ der Personen in Gruppe I, $\frac{1}{5}$ in Gruppe II, $\frac{2}{5}$ in Gruppe III und $\frac{3}{10}$ in Gruppe IV. Eine geprüfte Person wird nun zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass sie in der Kategorie II klassiert ist, wenn sie angibt, die Lösungshinweise beachtet zu haben?
b) dass sie die Lösungshinweise beachtet hat, wenn sie in der Kategorie II klassiert ist?

Hinweis: FTW gilt auch für eine endliche Partition (gehen Sie dazu kurz den Beweis durch)!!!

Aufgabe 21 [FTW mit bedingten Wahrscheinlichkeiten: bFTW] [3 Punkte]

(vgl. Lemma 1.7) $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Partition von Ω (die B_i's sind disjunkt und $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$; zudem seinen die B_i's Ereignisse, also in der Sigma-Algebra). Weiter haben wir ein $C \subset \Omega$ und es gelte für alle $i \geq 1 : P[C \cap B_i] > 0$. Zeigen Sie, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$:

$$P[A|C] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A|C \cap B_i] P[B_i|C].$$

Honours

Aufgabe 22 [Lemma 1.8, 2 Teil] [2 Punkte]

Sei $B_1, B_2, \ldots$ eine absteigende Folge von Ereignissen, d.h. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \ldots$. Wir definieren in dem Fall

$$B := \lim_{i \to \infty} B_i := \cap_{i \geq 1} B_i.$$

Zeigen Sie: dann gilt $P[B] = \lim_{i \to \infty} P[B_i]$.

Aufgabe 23 [Ereignisse, ohne Bezug zu P] [2 Punkte]

Konstruieren Sie eine (*einfache*!) Folge von Ereignissen $A_n, n \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \bigcap\nolimits_{i \geq n} A_i = \emptyset \text{ und } \bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\nolimits_{i \geq n} A_i \neq \emptyset.$$