Übungsblatt 4 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Zufallsgrössen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 41, Abgabe der Lösungen: Woche 42 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 43

Must

Aufgabe 24 [Verteilungsfunktion]

Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion einer Be(p)-Zufallsgrösse, falls man Verteilungsfunktionen als

$$F(a) := P[X < a]$$

definiert (was man nicht macht!).

Aufgabe 25 [Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeit]

Sei Z eine $U[4, 6]$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie

$$P[Z \in [5.5, 7]] \quad \text{und} \quad P[Z^2 \in [20, 35]].$$

Standard

Aufgabe 26 [Ist das eine Dichte?] [2 Punkte]

Die Dichten von stetigen Zufallsgrössen müssen auf 1 integrieren (analog: die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von diskreten Zufallsgrössen müssen auf 1 summieren). Untersuchen Sie, ob auf dem Intervall $[0, 1]$ die Funktion

$$f(x) = 2x$$

eine Dichte einer Zufallsgrössen X ist (f sei 0 ausserhalb des Intervalls $[0, 1]$). Berechnen Sie danach die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse und

$$P[X \in [0.5, 0.8]].$$

Aufgabe 27 [Verteilungsfunktion] [2+2 Punkte]

a) X sei exponentialverteilt; d.h. die Dichte sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und gleich 0 sonst. λ ist echt grösser null. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse.

b) Geben Sie mit Hilfe des Modells aus a) für $\lambda = 1$ die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Atom im Intervall $[2, 3]$ zerfällt. Wie sieht es aus mit $\lambda = 10$? Vergleichen Sie die beiden Resultate. Woher kommt der Unterschied? Geben Sie auch in Worten an, was der Ausdruck

$$1 - F_X(a)$$

ist.

Aufgabe 28 [Sind das Verteilungen?] [2+2+2 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktionen ("$P[X = k]$") bzw. Dichten, welche wir in 2.1 angegeben haben, tatsächlich auch Wahrscheinlichkeitsfunktionen bzw. Dichten sind. Überprüfen Sie dazu:

a) geometrische Verteilung: $\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} = 1$ mit $p \in (0,1)$?

b) Exponentialverteilung: $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ mit $\lambda > 0$?

c) Normalverteilung ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1?$$

Verwenden Sie bei c), dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

Honours

Aufgabe 29 [Messbarkeit] [2 Punkte]

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine reellwertige Funktion X an, sodass diese Funktion X keine Zufallsgrösse ist.

Aufgabe 30 [Harmonische Reihe und Konsorten I] [2+2+1 Punkte]

a) Sei X eine stetige Zufallsgrösse auf dem reellen Intervall $[1, \infty)$. Die Dichte sei von der Art

$$K_1(\alpha)\frac{1}{x^\alpha}.$$

Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_1(\alpha)$ eine *Normierungskonstante*. Welche Werte für α sind zulässig, damit es sich dabei wirklich um eine Dichte handelt? Geben Sie auch $K_1(\alpha)$ an.

b) Sei X eine stetige Zufallsgrösse auf dem reellen Intervall $(0, 1)$. Die Dichte sei von der Art

$$K_2(\alpha)\frac{1}{x^\alpha}.$$

Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_2(\alpha)$ eine *Normierungskonstante*. Welche Werte für α sind zulässig, damit es sich dabei wirklich um eine Dichte handelt? Geben Sie auch $K_2(\alpha)$ an.

c) Sei Y eine diskrete Zufallsgrösse auf den natürlichen Zahlen (ohne die Null). Die Wahrscheinlichkeitsfunktion sei dabei von der Art

$$K_3(\alpha)\frac{1}{n^\alpha}.$$

Dabei ist $\alpha > 0$ ein reeller Parameter und $K_3(\alpha)$ eine *Normierungskonstante*. Welche Werte für α sind zulässig, damit es sich dabei wirklich um eine Wahrscheinlichkeitsfunktion handelt?

Aufgabe 31 [Unabhängigkeit von Zufallsgrössen] [2 Punkte]

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und zwei Zufallsgrössen X und Y an, sodass

$$X^2 \coprod Y$$

aber nicht

$$X \coprod Y.$$

Es gibt sehr einfache Beispiele!