Übungsblatt 5 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Zufallsgrössen II

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 42, Abgabe der Lösungen: Woche 43 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 44

Must

Aufgabe 32 [Bivariate Verteilung]

a) X und Y seien unabhängig von einander und beide $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Wie ist hier $F_{X,Y}(0,0)$? Tipp: es gibt *keine* langen Rechnungen zu machen.

b) Sei jetzt X wieder $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. $Y(\omega) := -X(\omega)\ \forall\omega \in \Omega$. Wie ist jetzt $F_{X,Y}(0,0)$? Tipp: es gibt (wieder) *keine* langen Rechnungen zu machen.

Standard

Aufgabe 33 [Bivariate Verteilung, Unabhängigkeit] [1+1 Punkte]

a) Geben Sie zwei Zufallsgrössen X, Y mit gleicher Verteilung an, sodass $P[X + Y = 5] = 1$.

b) Seien X, Y zwei Zufallsgrössen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Es gelte

$$P[X = a] = P[Y = b] = 1$$

für 2 reelle Zahlen a, b. Sind X und Y unabhängig voneinander?

Aufgabe 34 [Transformation von Zufallsgrössen] [2 Punkte]

X sei eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, d.h. X hat als Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X^2.

Aufgabe 35 [max von Uniform] [3 Punkte]

$X_1, \ldots, X_n$ seien iid $U[0,1]$-Zufallsgrössen. Berechnen Sie die Dichtefunktion von

$$\max_i \{X_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

Tipp: Beispiel 2 in 2.6.

Aufgabe 36 [Stetige Zufallsgrösse, Integralrechnung] [2+2+1 Punkte]

a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} c(x+2)^{-2} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer Zufallsgrösse Y ist und zeichnen Sie den Graphen.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von Y an und zeichnen Sie ihren Graphen.

c) Berechnen Sie den Median von Y.

Honours

Aufgabe 37 [Summe von Zufallsgrössen] [1+2 Punkte]

a) Seien X und Y iid Zufallsgrössen, welche auf den natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, n\}, n \geq 2$, uniform verteilt sind ($P[X = i] = 1/n; 1 \leq i \leq n$). Ist $X+Y$ eine Zufallsgrösse, welche auf den natürlichen Zahlen $\{2, \ldots, 2n\}$ uniform verteilt ist?

b) Seien X und Y iid U$[0, 1]$-Zufallsgrössen. Ist $X + Y$ eine U$[0, 2]$-Zufallsgrösse?

Aufgabe 38 [Cauchy-Verteilung] [4 Punkte]

Ein Stück radioaktiven Stoffes wirft Partikel in zufälligen Richtungen aus, wobei keine Richtung bevorzugt wird. Das Stück wird in einer Entfernung von d Metern gegenüber einer unendlich ausgedehnten photographischen Platte aufgestellt. Die waagrechte Koordinate X eines auf der Platte auftreffenden Partikels ist dann eine Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte.