Übungsblatt 6 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Erwartungswerte (Teil 3.1)

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 43, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 31. Oktober, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 45

Must

Aufgabe 39 [Berechnung von Erwartungswerten, diskret]

Berechnen Sie a) $E[X]$, b) $E[X^2]$, und c) $E[(X - E[X])^2]$, wenn X die folgende Verteilung hat:

$$P[X = 8] = 1/8; P[X = 12] = 1/6; P[X = 16] = 3/8; P[X = 20] = 1/4; P[X = 24] = 1/12.$$

Aufgabe 40 [Berechnung von Erwartungswerten, stetig]

Eine Zufallsgrösse nehme nur Werte auf dem Intervall $[1, 2]$ an. Die Dichte sei dort

$$f(x) = K(x^2 + x),$$

mit einer Normierungskonstanten K.

a) Berechnen Sie K.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgrösse.
c) Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse [Verwenden Sie Lemma 3.7 b)].
d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse.

Standard

Aufgabe 41 [Transformierte Zufallsgrösse] [5 Punkte]

Eine diskrete Zufallsgrösse X nimmt folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$$(-4; 0.2), (-2; 0.1), (2; 0.4), (3.5; 0.1), (4; 0.2);$$

Lesebeispiel: der Wert 4 wird mit Wahrscheinlichkeit 0.2 angenommen.

a) Geben Sie entsprechende Tabellen für die Zufallsgrössen $Y := -2X + 2$, bzw. $Z := X^2$ an.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ und die Varianz $V(Y)$.
c) Berechnen Sie auch $E(Z)$ und $V(Z)$.
d) Überzeugen Sie sich, dass die Formeln $E(Y) = -2E(X) + 2$ und $V(Y) = (-2)^2V(X)$ gelten.
e) Verifizieren Sie die Formel $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Aufgabe 42 [Erwartungswerte berechnen] [2+1 Punkte]

Wie in der Vorlesung vordemonstriert, ist es vor allem bei diskreten Zufallsgrössen sehr hilfreich, wenn man bereits weiss, wie der Erwartungswert aussehen muss. Die Strategie lautet dann: 1. Ziel ($= E[X]$) angeben; 2. Ziel als Faktor isolieren, 3. Zeigen, dass Restfaktor $= 1$.

a) X habe eine $Bin(n, p)$-Verteilung, d.h.

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n.$$

Zeigen Sie, dass $E[X] = np$. Verwenden Sie an geeigneter Stelle, dass "Bin" eine Verteilung ist. Es geht hier nicht darum, Lemma 3.4 b) anzuwenden, sondern zu Fuss die Berechnungen zu machen.

b) Z sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Gehen Sie in 3.1 die Berechnung des Erwartungswerts $E[Z]$ nochmals durch und beweisen Sie danach mit ähnlichen Argumenten $E[Z^2] = \lambda^2 + \lambda$.

Aufgabe 43 [Exponentialverteilung] [2+2 Punkte]

a) Y habe eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$; d.h. die Dichte sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und gleich 0 sonst. Berechnen Sie $E[Y]$, ohne Lemma 3.6 zu benutzen (Tipp: partielle Integration). Skizzieren Sie ein paar Dichten für unterschiedliche λ und begründen Sie das Resultat z.B. mit Hilfe der Zeit bis zum Zerfall eines Atoms.

b) Y habe wieder eine Exponentialverteilung. Berechnen Sie $V[Y]$ (Tipp: verwenden Sie die Formel $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, Teil a) und erneut die partielle Integration).

Honours

Aufgabe 44 [Harmonische Reihe und Konsorten II] [4 Punkte]

Diese Aufgabe schliesst an Aufgabe 30 an. Wieder ist X eine stetige Zufallsgrösse auf dem reellen Intervall $[1, \infty)$. Die Dichte sei von der Art

$$K(\alpha)\frac{1}{x^\alpha},$$

wobei wir uns diesmal nicht für $K(\alpha)$ interessieren. $\alpha > 0$.

a) Wie muss α sein, damit $E[X] = \infty$?

b) Wie muss α sein, damit $E[X] < \infty$?

c) Wie muss α sein, damit $E[X] < \infty$ aber $E[X^2] = \infty$?

d) Sei j eine natürliche Zahl grösser 1. Wie muss α sein, damit $E[X^j] < \infty$ aber $E[X^{j+1}] = \infty$?

Aufgabe 45 [sd=Mean absolute Deviation?] [1 Punkt]

Finden Sie ein *einfaches* (diskretes) Gegenbeispiel einer Zufallsgrösse X, das zeigt, dass die "Formel"

$$E[|X - \mu_X|] = sd[X] \;\; (:= \sqrt{E[(X - \mu_X)^2]})$$

im Allgemeinen *nicht* gilt. Tipp: Es geht schon mit $|\Omega| = 2$, einer Zufallsgrösse, welche genau 2 Werte annehmen kann.