Übungsblatt 7 zur Vorlesung
"Einführung in die Statistik"

Erwartungswerte (Teil 3.2 und 3.3)

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 44, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 7. November, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 46

Must

Aufgabe 46 [Binomialverteilung]

Eine Prüfung bestehe aus 10 "multiple choice"-Fragen. Jede Frage hat 5 mögliche Antworten, wovon nur eine richtig ist. Nehmen wir realistischerweise an, dass ein Prüfling zufällig gemäss Gleichverteilung und unabhängig die Antworten unter den verschieden Möglichkeiten auswählt. Sei Z die Anzahl richtiger Antworten vom Prüfling. Bestimmen Sie $E[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$. Wenn mindestens 5 der Fragen richtig beantwortet sein müssen, um die Prüfung zu bestehen, wie ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Prüfling die Prüfung bestanden hat?

Aufgabe 47 [Erwartungswert des Inversen=Inverses des Erwartungswertes?]

Finden Sie ein *einfaches* (diskretes) Gegenbeispiel einer Zufallsgrösse X, das zeigt, dass die "Formel"

$$E[\frac{1}{X}] = \frac{1}{E[X]}$$

im Allgemeinen *nicht* gilt. Tipp: Es geht schon mit $|\Omega| = 2$, einer Zufallsgrösse, welche genau 2 Werte annehmen kann, sogar mit Wahrscheinlichkeit je 0.5.

Aufgabe 48 [Stichproben]

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer beliebiger Verteilung. Wir definieren (arithmetisches Mittel, bzw. Stichproben-Varianz):

$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad s^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Zeigen Sie:

a)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0,$$

b)

$$s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

Standard

Aufgabe 49 [elementare Rechenregeln der Varianz; Beweis von Lemma 3.7] [2 Punkte]

Beweisen Sie:

a) $V[aX + b] = a^2 V[X]$ für a, b reelle Zahlen.
b) $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Aufgabe 50 [Varianz und Unabhängigkeit] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrössen. Die Verteilung soll immer die gleiche sein, nämlich $P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = 0.5$ (man nennt diese Zufallsgrösse übrigens auch eine Bernoulli-Zufallsgrösse). Wir definieren weiter

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

a) Berechnen Sie $E[X_1]$ und $V[X_1]$.

b) Berechnen Sie $E[S_n]$ und $V[S_n]$.

c) Wie muss man $g(n)$ wählen, damit in

$$\frac{S_n}{g(n)}$$

die Varianz bzw. Standardabweichung konstant bleibt, egal wie gross n ist?

Aufgabe 51 [R, Mittelwerte und Median] [1 Punkt]

Generieren Sie in R eine Stichprobe bestehend aus 5 Realisationen einer $\mathcal{N}(0,4)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $\overline{x}$. Berechnen Sie den "trimmed" mean für diverse "Trimmungen". Berechnen Sie auch den Median. Was fällt auf? Bei Aufgaben mit R ist der Computer-Ausdruck immer auch abzugeben! Achtung: wie gibt man in R die Varianz bei einer Normalverteilung ein?

Aufgabe 52 [R, Mittelwerte/Varianz und Schätzung] [2+2+1 Punkte]

a) Generieren Sie in R nacheinander die folgenden 5 Vektoren: Stichprobe von 10, 100, 1'000, 10'000, 100'000 unabhängige Realisationen aus einer Exponentialverteilung mit Parameter λ und legen Sie diese mit Namen $a1, a2, a3, a4, a5$ ab (ab 1'000 nicht mehr anschauen; dauert zu lange...). Für λ wählen Sie Ihre Personal Number PN (entspricht den letzten beiden Ziffern der Legi).

b) Berechnen Sie in allen 5 Fällen arithmetisches Mittel und Stichproben-Varianz.

c) Was vermuten Sie, konvergieren diese Werte und gegen was?

Honours

Aufgabe 53 [Varianz minimiert $E[(X-a)^2]$] [2 Punkte]

Sei X eine Zufallsgrösse mit $E[X^2] < \infty$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$V[X] = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X-a)^2].$$

Dabei ist a eine reelle Zahl, welche variiert wird. a ist aber nicht eine Zufallsgrösse; X schon.

Aufgabe 54 [2 Punkte]

Zeigen Sie:

a)

$$E[X^2] < \infty \Rightarrow E[X] < \infty;$$

b) falls $k \leq j$

$$E[|X|^j] < \infty \Rightarrow E[|X|^k] < \infty.$$

Tipp: Skizzieren Sie dazu im gleichen Koordinatensystem die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x$. Wie kann man "erreichen", dass "$x^2 \geq x$" immer gilt (benutzen Sie $E[1] = 1 < \infty$)?