Übungsblatt 8 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Erwartungswerte (Teil 3.4 und 3.5)

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 45, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 14. November, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 47

Must

Aufgabe 55 [Bedingte Dichte ist tatsächlich Dichte]

Zeigen Sie, dass Formel (3.2) tatsächlich eine Dichte angibt. Benutzen Sie dazu Turnübung 2 in 2.4.

Standard

Aufgabe 56 [einfache Turnübungen Cov, Cor] [4 Punkte]

Zeigen Sie:

a) $Cov(X,Y) := E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[X(Y-E[Y])] = E[(X-E[X])Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

b) $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$ für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (*Lageninvarianz* dank Zentrierung!)

c) $|Cor(aX+b, cY+d)| = |Cor(X,Y)|$ für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ wo $a \neq 0, c \neq 0$ (*Skaleninvarianz* wegen Normierung!)

d) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$, beachten Sie auch den Fall $Y := X$.

Aufgabe 57 [Fangfrage zu Stichproben-Korrelation und lineare Gleichläufigkeit] [1 Punkt]

In der Vorlesung haben wir in Lemma 3.10 b) gezeigt, dass wir eine perfekte lineare Gleichläufigkeit zwischen X und Y haben, wenn der Absolutbetrag der Korrelation gleich 1 ist: $|Cor(X,Y)| = 1$. Im Fall von "+1" liegen bei zentrierten Zufallsgrössen alle Punkte auf einer Geraden durch den Nullpunkt mit positiver Steigung, im Fall von "-1" liegen alle Punkte auf einer Geraden durch den Nullpunkt mit negativer Steigung. Wie ist es, wenn alle Punkte genau auf der x-Achse liegen?

Aufgabe 58 [R, Korrelationskoeffizient "von Hand" berechnen] [2 Punkte]

a) Generieren Sie einen Vektor der Länge 1000 aus einer Exponentialverteilung mit Parameter λ, wobei Sie für λ Ihre PN wählen (die letzten beiden Ziffern Ihrer Studentennummer). Legen Sie diesen Vektor mit Buchstaben u ab. Dann definieren Sie $v := log(u)$, indem Sie von jeder einzelnen Zahl den Logarithmus nehmen. Berechnen Sie hiervon $cor(u,v)$. Was sagen Sie dazu wenn Sie Lemma 3.10 b) konsultieren wollen?

b) Stellen Sie sich vor, man habe vergessen, in R die beiden Funktionen "cov" und "cor" zu programmieren. Sie müssen jetzt "von Hand" (mit mean(.), var(.), ...) diese Rechnungen durchführen. Berechnen Sie nochmals $cor(u,v)$ auf diese Weise und vergleichen Sie mit a).

<u>Aufgabe 59 [R, Korrelationskoeffizient und lineare Gleichläufigkeit]</u> [1+1+2 Punkte]

a) Generieren Sie in R einen 100'000-er-Vektor aus der $\mathcal{N}(0,4)$-Verteilung (**Achtung**: wie wird die Varianz in R bei $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ eingegeben?) und legen Sie diesen als m ab. Berechnen Sie dann $n := 5 + 2m$ für jede einzelne Koordinate. Berechnen Sie jetzt $cor(m,n)$. Begründen Sie das Resultat.

b) Berechnen Sie dann $f := m^2$ für jede einzelne Koordinate. Berechnen Sie jetzt $cor(m,f)$. Kommentieren Sie das Resultat nach einer allfälligen Zentrierung mit Hilfe der $x-y-$Ebene.

c) Begründen Sie das Resultat aus b) mit einer theoretischen Überlegung, indem Sie berücksichtigen, dass es sich um eine Normalverteilung handelt (überlegen Sie sich, wie man die theoretische Kovarianz berechnet und wie man Erwartungswerte berechnet, insbesondere im Fall dieser Normalverteilung, welche ja symmetrisch um Null ist).