Übungsblatt 9 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Ausgewählte Verteilungen

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 46, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 21. November, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 48

Must

Aufgabe 60 [Ablesen von Wahrscheinlichkeiten aus Tabellen, Z-Transform]

In den nachfolgenden Teil-Aufgaben geht es darum, einerseits (wo notwendig) zuerst Umformungen vorzunehmen um danach in Tabellen (Krengel) oder in R die Wahrscheinlichkeiten abzulesen. In den Prüfungen müssen Sie analoge Aufgaben mit den Tabellen aus Krengel lösen können.

a) Sei X eine $\mathcal{N}(2,9)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[-2 < X < 3]$.

b) Sei X eine $\mathcal{N}(20,25)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[X > 19]$.

c) Sei X eine χ^2_3-Zufallsgrösse. Finden Sie $P[X \geq 6.25]$.

Standard

Aufgabe 61 [Halbwertszeit, Median, Erwartungswert bei Exp] [2 Punkte]

Y habe eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$; d.h. die Dichte sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und sonst gleich 0. Jemand hat nun Probleme mit den Begriffen "Halbwertszeit", "Median" und "Erwartungswert" bei dieser Zufallsgrösse, welche ein Modell für den radioaktiven Zerfall ist. Helfen Sie dieser Person, indem Sie die drei Ausdrücke berechnen (zwei davon sind gleich). Wie ist das Verhältnis zwischen Halbwertszeit und Erwartungswert?

Aufgabe 62 [Gedächtnislosigkeit von Ge und Exp] [2 Punkte]

a) Sei G eine geometrisch verteilte Zufallsgrösse. Zeigen Sie: Dann gilt für natürliche Zahlen $n > m > 0$:

$$P[G > n | G > m] = P[G > n - m].$$

b) Sei T eine exponential verteilte Zufallsgrösse. Zeigen Sie: Dann gilt für reelle Zahlen $t > s > 0$:

$$P[T > t | T > s] = P[T > t - s].$$

Aufgabe 63 [Z-Transform] [2 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Zufallsgrösse. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil 2.6, dass die Z-Transform

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

eine $\mathcal{N}(0,1)$-Zufallsgrösse ist.

Aufgabe 64 [Bin+Bin=Bin wenn p gleich] [2 Punkte]

X habe die $Bin(n_1, p)$-Verteilung, Y habe die $Bin(n_2, p)$-Verteilung. $X \coprod Y$. Zeigen Sie, dass $X + Y$ die $Bin(n_1 + n_2, p)$-Verteilung besitzt. Benutzen Sie dazu die Formel aus 4.4.1.1. (und nicht die Tatsache, dass man beide Bin Zufallsgrössen in ihre Bernoulli-Bausteine zerlegen und danach wieder neu zusammensetzen könnte). Verwenden Sie ein kombinatorisches Argument bei der Gleichsetzung der Binomialkoeffizienten.

Aufgabe 65 [$U[0,1] + U[0,1] \neq U[0,2]$] [2 Punkte]

Berechnen Sie die Dichte von $X_1 + X_2$, wenn $X_i, 1 \leq i \leq 2$, iid $U[0,1]$-Zufallsgrössen sind (vgl. Aufgabe 37 b)). Benutzen Sie 4.4.1.2.

Aufgabe 66 [R, Summe von normalverteilten Zufallsgrössen] [2 Punkte]

Wir haben in Kapitel 4 bewiesen, dass wenn X eine $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$-Verteilung besitzt und Y eine $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$-Verteilung und $X \coprod Y$, dann gilt: $X + Y$ hat eine $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-Verteilung.

a) Machen Sie in R folgende Realisationen, um dies zu überprüfen: x eine Stichprobe vom Umfang 5000 aus einer $\mathcal{N}(3,9)$-Verteilung, y eine Stichprobe vom Umfang 5000 aus einer $\mathcal{N}(4,25)$-Verteilung. Untersuchen Sie $x + y$, indem Sie "mean", "var", "hist" und den Befehl "qqnorm" benutzen.

b) Was macht der Befehl "qqnorm"? Berechnen Sie dazu auch qqnorm(runif(1000)) und qqnorm(rexp(1000)).

Honours

Aufgabe 67 [Standardmodell aus der Finanzmathematik] [2 Punkte]

In der Finanzmathematik wird im Modell von Samuelson (in diesem Modell gilt die berühmte Formel von Black-Scholes zur Bewertung einer europäischen Call-Option) der Kurs einer Aktie mit folgender Formel modelliert:

$$S_t := S_0 \exp\big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma X_t\big).$$

Dabei ist μ die Drift und σ die Volatilität. X_t ist eine sogenannte Standard-Brown'sche Bewegung. Für die Lösung dieser Aufgabe müssen Sie nur wissen, dass X_t zur Zeit t eine $\mathcal{N}(0,t)$-Verteilung hat. Berechnen Sie mit $S_0 = 1$ (Wert der Aktie Heute $(t = 0)$), $\mu = 0.05, \sigma = 0.1$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie nach einem Jahr $(t = 1)$ im Intervall $[1.1,\ 1.4]$ zu liegen kommt, also

$$P\big[S_1 \in [1.1,\ 1.4]\big].$$

Diese Aufgabe ist nicht schwierig und wäre auch unter den "Must"-Aufgaben denkbar... .

Aufgabe 68 [Dichte der Gamma(n, λ)-Verteilung] [4 Punkte]

Beweisen Sie mit Induktion über n, dass

$$f(y) = \frac{y^{n-1} e^{-\lambda y} \lambda^n}{\Gamma(n)},\ y \geq 0,$$

die Dichtefunktion der Gamma(n, λ)-Verteilung ist. Benutzen Sie $\Gamma(n+1) = n!$.