Übungsblatt 10 zur Vorlesung

"Einführung in die Statistik"

Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew, $n \to \infty$, LLN, CLT

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 47, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 28. November, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 49

Must

Aufgabe 69 [R-Aufgabe zu LLN und CLT; was passiert, wenn $E[|X|] = \infty$]

Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von iid Zufallsgrössen mit Verteilung $P[X_1 = -1] = P[X_1 = 1] = 0.5$ (Bernoulli). Wir definieren $S_0 := 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Simulieren Sie auf R die folgenden Situationen 10 mal ("ntimes") mit $n = 10'000$ ("npoints"). Die Funktionen holen Sie von www.luchsinger-mathematics.ch/Sn.txt und kopieren Sie einfach in's R-Command-Tool. Drucken Sie die Plots zweimal aus; einmal für die Übungen - die anderen Plots gehören in's Vorlesungsskript.

a) S_n, $S_n/\sqrt{n}$ und S_n/n.

b) Simulieren Sie auch S_n/n, wobei Sie jetzt statt obigem X_i eine Cauchy-Zufallsgrösse nehmen. Ändern Sie den Range der y-Achse auf $[-20, 20]$.

Standard

Aufgabe 70 [Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew I] [1+1 Punkte]

Die ungenauen Messungen der Seitenlängen eines Rechtecks seien (positive) unabhängige Zufallsgrössen X und Y. Von diesen Zufallsgrössen wissen wir leider nur: $E[X] = 6, E[Y] = 8, V[X] = 0.002, V[Y] = 0.003$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Flächeninhalts Z des Rechtecks ("ganz normal mit $Z = XY$"). Verwenden Sie dabei (freiwilliger, kleiner Beweis), dass wenn $X \coprod Y$, dann auch $X^2 \coprod Y^2$.

b) Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew (genauer mit Formel (5.1)) ab, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass der berechnete Flächeninhalt Z von seinem Erwartungswert um weniger als 2 % abweicht.

Aufgabe 71 [Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew II und -III] [1+1 Punkte]

a) Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $P[|X| > t]$ für $t \in \mathbb{R}_+$ und vergleichen Sie dieses Resultat mit der Abschätzung, die aus der Ungleichung von Bienayme-Tschebyschew (Satz 5.1 selber) hergeleitet wird.

b) Ein fairer Würfel werde 1200 mal geworfen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, mindestens 345 und höchstens 455 mal eine Fünf oder Sechs zu werfen.

Aufgabe 72 [Einsatz des CLT für approximative Berechnungen] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von iid Zufallsgrössen mit Verteilung $P[X_1 = -1] = P[X_1 = 1] = 0.5$ (Bernoulli). Wir definieren $S_0 := 0$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Berechnen Sie approximativ mit Hilfe des CLT

$$P[S_{40'000} > 200].$$

Aufgabe 73 [Praktische Formel] [2+1+1 Punkte]

In der Praxis hat man manchmal die Situation, dass man eine Summe von iid Zufallsgrössen $X_1, \ldots, X_n$ ($E[X_1] = \mu, V[X_1] = \sigma^2$) betrachtet und dann sagt:

$$P[\sum_{i=1}^n X_i \in [n\mu - 2\sqrt{n}\sigma, n\mu + 2\sqrt{n}\sigma]] \doteq 0.95.$$

a) Begründen Sie diese Approximation mit einem Satz aus der Vorlesung.

b) Formulieren Sie obiges Resultat aus für den Fall X_1 ist Be(p).

c) Formulieren Sie obiges Resultat aus für den Fall $\sum_{i=1}^n X_i$ ist Po(λ) mit grossem λ.

Honours

Aufgabe 74 [Vervollständigung des Beweises: $s^2 \longrightarrow V[X]$] [3+3 Punkte]

a) Zeigen Sie: Wenn für jedes $\epsilon_1 > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - E[X_1]\right| \geq \epsilon_1\right] = 0,$$

dann auch für jedes $\epsilon_2 > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - (E[X_1])^2\right| \geq \epsilon_2\right] = 0.$$

b); viel einfacher als a) Zeigen Sie: Wenn für jedes $\epsilon_1 > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - (E[X_1])^2\right| \geq \epsilon_1\right] = 0$$

und für jedes $\epsilon_2 > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - E[X_1^2]\right| \geq \epsilon_2\right] = 0,$$

dann auch für jedes $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - \left(E[X_1^2] - (E[X_1])^2\right)\right| \geq \epsilon\right] = 0.$$

Tipp: Schauen Sie sich die entsprechenden Sätze aus der Analysis I an (Satz 4 und Satz 3, §4, Forster I).