

Übungsblatt 12 zur Vorlesung

”Einführung in die Statistik”

Schätzer & Konfidenzintervalle

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 49, Abgabe der Lösungen: bis Freitag, 12. Dezember, 16.15 Uhr, Besprechung: Woche 51

Must

Aufgabe 80 [Eigenschaften von Schätzern]

Sei x_1, \dots, x_n eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Geben Sie *einfache* Beispiele für:

- einen Schätzer für μ , der zwar erwartungstreu, aber nicht konsistent ist.
- einen Schätzer für μ , der zwar konsistent, aber nicht erwartungstreu ist.

Aufgabe 81 [KI bei Normalverteilung, σ^2 bekannt]

Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit $\sigma = 1.14$ mm beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 250$ ergab sich $\bar{x} = 12.55$ mm. Bestimmen Sie für die Vertrauenswahrscheinlichkeit von 0.95 die Grenzen des KI für den mittleren Durchmesser dieser Kugeln.

Standard

Aufgabe 82 [$MSE = V + b^2$, Lemma 7.6] [2 Punkte]

Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus 7.1.3 gilt:

$$MSE(\hat{\mu}_n, \mu) = V_{\mu}[\hat{\mu}_n] + b^2.$$

Aufgabe 83 [MLE bei der Exponentialverteilung] [4 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten x_1, \dots, x_n aus einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: In Aufgabe 76 haben Sie die gemeinsame Dichte bereits berechnet und benutzen Sie um Himmels Willen den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 84 [MLE bei der Bernoulli-Verteilung] [4 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten x_1, \dots, x_n aus einer Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in (0, 1)$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: In 6.3.2 haben wir die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion bereits berechnet und benutzen Sie um Himmels Willen den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 85 [KI bei Normalverteilung, σ^2 unbekannt] [2 Punkte]

Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 17$ erhält man einen mittleren Durchmesser $\bar{x} = 9.2$ mm und eine Streuung

$$\sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{17} (x_i - \bar{x})^2} = 0.59 \text{ mm.}$$

Bestimmen Sie hieraus ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Niveau $(1 - \alpha) = 0.95$.

Honours

Aufgabe 86 [Erwartungstreuer Schätzer der Varianz] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid-Zufallsgrößen mit $E[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz. Dieses Resultat gilt übrigens für beliebige Verteilungen! Tipp: einfach drauflosrechnen.

Aufgabe 87 [Konfidenzintervalle für Proportionen] [1+5 Punkte]

Sie werden beauftragt, als statistischer Consultant der Republikaner bei den U.S. Primaries herauszufinden, wie gross der Anteil der Anhänger von Mitt Romney an der gesamten Wahlbevölkerung ist. Dazu lassen Sie eine Umfrage unter 1'000 Personen durchführen. Genau 555 Personen gaben an, dass sie Mitt Romney wählen werden - der Rest wählt jemand anderen. Gehen Sie mal davon aus, dass die 1'000 Personen repräsentativ ausgewählt wurden und ehrliche Antworten gaben (die letzte Annahme ist übrigens normalerweise falsch!).

a) Wie hoch schätzen Sie den Anteil der Anhänger von Mitt Romney? Bitte mit mathematischer Begründung und Nennung der Methode.

b) Geben Sie ein 95 % -KI für den Anteil der Anhänger von Mitt Romney an. Benutzen Sie dazu den CLT.

Gehen Sie bei den Berechnungen von einer unendlich grossen Gesamtpopulation aus.