Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. C.J. Luchsinger

3 Unabhängigkeit

Wir repetieren zuerst unsere elementaren Vorstellungen von Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsgrössen aus der WTS:

3.1 Unabhängigkeit von Zufallsgrössen

Entgegen dem Aufbau in WTS werden wir jetzt zuerst die Unabhängigkeit von *Zufallsgrössen* behandeln und definieren hierzu erstmal:

Defintion 3.1 [Unabhängigkeit von Zufallsgrössen] *Zufallsgrössen* $X_1, \ldots, X_n$ *sind unabhängig, wenn*

$$P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in B_i]$$

für alle Borelmengen $B_1, \ldots, B_n$. *Eine unendliche Menge von Zufallsgrössen sei unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge hiervon unabhängig ist.*

Obige Definition ist ein wenig umständlich: wir müssten dazu jede Borel-Menge überprüfen - und die können kompliziert sein! Bereits in der Vlsg WTS haben wir jedoch gesehen, dass die Faktorisierung der Verteilungsfunktion bereits ein gleichwertiges Kriterium ist. Damit können wir - wie schon häufig in Kapitel 1 und 2 - eine Vereinfachung machen derart, dass anstelle von *allen* Borel-Mengen lediglich ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - hier die halboffenen Intervalle $(-\infty, a]$ - überprüft werden müssen.

Satz 3.2 [Faktorisierung von F und Unabhängigkeit] *Zufallsgrössen* $X_1, \ldots, X_n$ *sind unabhängig genau dann wenn*

$$F_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$$

für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Beweis Satz 3.2

$\Rightarrow$:

$\Leftarrow$:

Bereits in der Vlsg WTS haben wir immer wieder betont, dass die Definition der Verteilungsfunktion(en) gleich ist für alle Arten von Verteilungen (diskret, absolut stetig und singulär stetig - sogar für konvexe Linearkombinationen hiervon). Unterschiede ergeben sich, sobald wir die Wahrscheinlichkeitsfunktionen (diskret) bzw die Dichten (absolut stetig) im Hinblick auf die Unabhängigkeit der zugrunde liegenden Zufallsgrössen untersuchen wollen. Deshalb folgen jetzt 2 sich entsprechende Sätze (Satz 3.3 und Satz 3.4):

Satz 3.3 [Unabhängigkeit diskreter Zufallsgrössen] *Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsgrössen mit Werten in der abzählbaren Menge C. Dann gilt: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$P[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = a_i]$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in C$.

Beweis Satz 3.3

Dann noch das Analogon im stetigen Fall:

Satz 3.4 [Unabhängigkeit absolut stetiger Zufallsgrössen] $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ *sei ein absolut stetiger Zufallsvektor. Dann gilt:* $X_1, \ldots, X_n$ *sind unabhängig genau dann wenn*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

für fast alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Beweis Satz 3.4

Um das folgende, kleine Korollar zu verstehen, lesen Sie vorher bitte die Resultate und Definitionen aus 2.7 nochmals durch. Gemäss Lemma 2.20 gilt, dass die Komponenten eines absolut stetigen Zufallsvektors immer auch absolut stetig sind. Wir haben bereits dort darauf hingewiesen, dass - im Gegensatz zum diskreten Fall - die Umkehrung *nicht* gilt und dazu auch ein Beispiel gegeben. Hingegen gilt die Umkehrung, wenn wir noch die Unabhängigkeit der Einzelkomponenten fordern:

Korollar 3.5 [absolut stetiger Vektor und absolut stetige Komponenten bei Unabhängigkeit] *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsgrössen. Dann gilt: die Komponenten $(X_i)_{i=1}^n$ sind genau dann absolut stetig, wenn auch der Vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ absolut stetig ist.*

Beweis Korollar 3.5

3.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition 3.6 [Unabhängigkeit von Ereignissen] *Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig, wenn die Indikatoren $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ (Zufallsgrössen!) unabhängig sind. Eine unendliche Sammlung von Ereignissen nennen wir unabhängig, wenn jede endliche Teilsammlung unabhängig ist.*

Wir müssen natürlich schauen, dass diese Definition gleichwertig mit der Definition aus der WTS ist - dies *ist* der Fall:

Satz 3.7 [Gleichwertigkeit der Definitionen von Unabhängigkeit von Ereignissen] *Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig genau dann wenn*

$$P[\cap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i]$$

für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Beweis Satz 3.7

Sie beweisen in einer Übungsaufgabe, dass $A_1, \ldots, A_n$ genau dann unabhängig sind, wenn auch $A_1^c, \ldots, A_n^c$ unabhängig sind.

In Kapitel 1 haben wir in Satz 1.11 [Borel-Cantelli I] gezeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] < \infty \Rightarrow P[\limsup_n A_n] = 0.$$

Im Fall von Unabhängigkeit haben wir auch eine Umkehrung der Art:

Satz 3.8 [Borel-Cantelli II] *Seien $A_1, A_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] = \infty \Rightarrow P[\limsup_n A_n] = 1.$$

Beweis Satz 3.8

In den Übungen werden Sie noch Beispiele zu Borel-Cantelli angeben müssen.