Übungsblatt 1 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Repetition Wahrscheinlichkeitstheorie aus WTS

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 08, Abgabe der Lösungen: Woche 09 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 10

Must

Aufgabe 1 [Überblick über die wichtigsten Zufallsgrössen]

Sie haben bereits vor längerer Zeit die Vlsg WTS bei mir besucht. In der WT wird die Anschauung eher zu kurz kommen. Damit Ihnen die wichtigsten Verteilungen gegenwärtig sind, lesen Sie bitte in WTS Kapitel 4, und zwar dort Teil 4.2 und Teil 4.3 bis und mit 4.3.5. durch.

Standard

Bei den folgenden Aufgaben wird (noch) nicht verlangt, dass Sie allfällige Beweise völlig exakt führen mit Resultaten aus der WT (die Sie ja eh noch nicht haben). Lösen Sie die unteren Aufgaben auf dem Niveau und mit ausschliesslichem Vorwissen aus WTS. Sie dürfen Resultate aus dem WTS-Skript (gerne mit Verweis) ohne weiteren Beweis übernehmen.

Aufgabe 2 [Z-Transformation] [2 Punkte]

X sei $\mathcal{N}(4, 49)$-verteilt. Berechnen Sie $P[X \in [5, 9]]$.

Aufgabe 3 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte I] [2 Punkte]

Geben Sie die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgrösse X an, welche *gleichzeitig* folgende Eigenschaften hat:

1. $f(x) \geq 0 \;\; \forall x > 0$.
2. Median von X sei 2
3. $E[|X|] < \infty$.
4. $P[X \leq 0] = 0$.

Sie dürfen dazu eine Zufallsgrösse selber erfinden und müssen nicht eine aus WTS-Kapitel 4 nehmen (können aber).

Aufgabe 4 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte II] [1+1+1 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(3, 4)$-Zufallsgrösse, Y eine Exp(3)-Zufallsgrösse und Z eine $U[3, 5]$-Zufallsgrösse. X, Y, Z seien jeweils unabhängig voneinander.

a) Berechnen Sie $E[X + Y + Z]$.
b) Brauchen Sie für a) die Unabhängigkeit?
c) Berechnen Sie auch $V[X + Y + Z]$.

Aufgabe 5 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte III] [1+1+1+1+1 Punkte]

Die Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ an: $P[X = i] =: p_i$. Es gelte $p_0 = 2p_1; p_1 = p_2 = p_3 = p_4$. Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

b) $E[X]$

c) $V[X]$

d) $E[(1 + X^2)^{-1}]$

e) die Zahl a, sodass $E[(X - a)^2]$ minimal wird (sie dürfen dazu Resultate aus WTS-Vlsg od WTS-Ue benutzen)

Honours

Aufgabe 6 [ein kleines Limesresultat] [2+2 Punkte]

Sei X eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-Zufallsgrösse.

a) Beweisen Sie: $E[e^X] \geq 1$.

b) Beweisen Sie: $\lim_{\sigma\to\infty} E[e^X] = \infty$. Mit der richtigen Idee kann man das auf 2 Zeilen beweisen.

Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

3. März 2012

Aufgabe 2 [Z-Transformation]
Sei X eine $\mathcal{N}(4,49)$-verteilte Zufallsgrösse. Nun gilt

$$P[X \in [5,9]] = P[X \leqslant 9] - P[X \leqslant 5] \underset{\mathrm{R}}{\doteq} \texttt{pnorm(9,4,sqrt(49))-pnorm(5,4,sqrt(49))} \doteq 0.2056762.$$

Alternativ können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch mit Hilfe der Z-Transformation (siehe Abschnitt 4.3.4 aus der Vorlesung WTS) und einer entsprechenden Tabelle bestimmen:

$$\begin{aligned} P[X \in [5,9]] &= P\left[\frac{X-4}{\sqrt{49}} \in \left[\frac{5-4}{\sqrt{49}}, \frac{9-4}{\sqrt{49}}\right]\right] = P[\mathcal{N}(0,1) \in [1/7, 5/7]] \\ &= P[\mathcal{N}(0,1) \leqslant 5/7] - P[\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1/7] \doteq 0.7611 - 0.5557 = 0.2054. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte I]
Es sei $\lambda = \ln(2)/2$ und X sei eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsgrösse, d.h. eine Dichtefunktion f von X ist durch (siehe Abschnitt 4.3.2 der Vorlesung WTS)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

gegeben.

Nun haben wir, wie gewünscht, die folgenden 4 Eigenschaften.

1. Es gilt klar $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \geqslant 0$, wie für jede Dichtefunktion.
2. Der Median $\tilde{x}$ von X ist durch die Gleichung

   $$P[X \leqslant \tilde{x}] = 1/2$$

   definiert. Wie wir in Aufgabe 61 der Vorlesung WTS gesehen haben, liefert dies

   $$\tilde{x} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 2.$$

3. Es gilt

   $$E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx = E[X] = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

4. Wir haben

   $$P[X \leqslant 0] = \int_{-\infty}^{0} f(x) dx = 0,$$

   da $f(x) = 0$ für $x < 0$.

Aufgabe 4 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte II]
Sei X eine $\mathcal{N}(3,4)$-Zufallsgrösse, Y eine $\mathrm{Exp}(3)$-Zufallsgrösse und Z eine $U[3,5]$-Zufallsgrösse. Desweiteren seien X, Y und Z jeweils voneinander unabhängig.

a) Nach Lemma 3.4 b) aus der Vorlesung WTS (Linearität des Erwartungswertes) gilt

$$E[X+Y+Z] = E[X] + E[Y] + E[Z] = 3 + \frac{1}{3} + \frac{5+3}{2} = \frac{22}{3} \doteq 7.333333.$$

b) Für die Lösung der Teilaufgabe a) haben wir die Unabhängigkeit *nicht* verwendet. Denn Lemma 3.4 b) setzt diese nicht voraus.

c) Nach Lemma 3.8 b) aus der Vorlesung WTS ("Varianz einer Summe ist Summe der Varianzen bei Unabhängigkeit") gilt

$$V[X+Y+Z] = V[X]+V[Y]+V[Z] \;=\; 4+\frac{1}{3^2}+\frac{(5-3)^2}{12} \;=\; \frac{40}{9} \;\doteq\; 4.444444.$$

Aufgabe 5 [Zufallsgrössen und Erwartungswerte III]
Die Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $\{0,1,2,3,4\}$ an. Für $i=0,1,2,3,4$ sei $p_i = P[X=i]$. Es gelte weiter $p_0 = 2p_1$ und $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$.

a) Da X nur Werte in der Menge $\{0,1,2,3,4\}$ annimmt, muss gelten

$$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4 = 1.$$

Ausserdem gilt $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ und somit $p_1+p_2+p_3+p_4 = 4p_1 = 2p_0$, da $p_0 = 2p_1$. Wir schliessen

$$1 = p_0 + 2p_0 \;=\; 3p_0,$$

also $p_0 = 1/3$ und somit $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/6$.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X lautet also wie folgt

$$P[X=k] = \begin{cases} 1/3, & \text{falls } k=0 \\ 1/6, & \text{falls } k=1,2,3,4 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Es gilt

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4 \;=\; \frac{5}{3} \;\doteq\; 1.666667.$$

c) Wir berechnen erst $E[X^2]$:

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0^2+\frac{1}{6}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\cdot 2^2+\frac{1}{6}\cdot 3^2+\frac{1}{6}\cdot 4^2 \;=\; 5.$$

Nun folgt mit Lemma 3.7 b) aus der Vorlesung WTS und mit b)

$$V[X] = E[X^2]-E[X]^2 \;=\; 5-\left(\frac{5}{3}\right)^2 \;=\; \frac{20}{9} \;\doteq\; 2.222222.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} E[(1+X^2)^{-1}] &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+0^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+4^2} \\ &= \frac{81}{170} \;\doteq\; 0.476471. \end{aligned}$$

e) Wie wir in Aufgabe 53 der Vorlesung WTS gesehen haben, wird der Ausdruck $E[(X-a)^2]$ für $a = E[X]$ minimal. Somit lautet die Antwort auf die Frage hier nach Teilaufgabe b)

$$a = E[X] \;=\; \frac{5}{3} \;\doteq\; 1.666667.$$

Aufgabe 6 [ein kleines Limesresultat]
Sei X eine $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$-Zufallsgrösse.

a) **Behauptung:** Es gilt $E[e^X] \geqslant 1$.

Beweis: Da die Exponentialfunktion eine konvexe Funktion ist, können wir die Jensen-Ungleichung (siehe Lemma 3.5 aus der Vorlesung WTS) anwenden:

$$E[e^X] \geqslant e^{E[X]} \;=\; e^0 \;=\; 1.$$

■

b) **Behauptung:** Es gilt $\lim_{\sigma\to\infty} E[e^X] \;=\; \infty$.

Beweis: Um dies zu zeigen, bedienen wir uns den Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{\{X<\sigma\}}$ und $\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}$. Es gilt nämlich klar $\mathbf{1}_{\{X<\sigma\}} + \mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}} = 1$ und damit

$$\begin{aligned}E[e^X] &= E[e^X\mathbf{1}_{\{X<\sigma\}} + e^X\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}] \;=\; E[e^X\mathbf{1}_{\{X<\sigma\}}] + E[e^X\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}] \geqslant E[e^X\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}]\\ &\geqslant E[e^\sigma]E[\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}] \;=\; e^\sigma E[\mathbf{1}_{\{X\geqslant\sigma\}}] \;=\; e^\sigma P[X \geqslant \sigma] \;=\; e^\sigma P[\mathcal{N}(0,1) \geqslant 1],\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Z-Transformation verwendet haben.

Da nun $P[\mathcal{N}(0,1) \geqslant 1] = 0.1586\ldots > 0$ folgt damit die Behauptung.

■