Übungsblatt 2 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Experiment, Ereignisse, σ-Algebren

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 09, Abgabe der Lösungen: Woche 10 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 11

Must

Aufgabe 7 [Ereignisraum]

Geben Sie zu jedem der 6 Fälle von Ereignisräumen aus 1.1 ein *neues* Beispiel aus der "realen Welt" an, welches man "sinnvollerweise" mit dem jeweiligen Fall modelliert. Besprechung von Grenzfällen erwünscht!

Aufgabe 8 [Ist Potenzmenge eine σ-Algebra?]

Untersuchen Sie, ob die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.

Standard

Aufgabe 9 [$\limsup$ und $\liminf$ von Mengen] [1 Punkt]

Untersuchen Sie, ob allgemein $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$ oder umgekehrt oder weder noch.

Aufgabe 10 [$\limsup, \liminf$] [1 Punkt]

Zeigen Sie:

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$$

Aufgabe 11 [Konvergenz von monotonen Folgen von Ereignissen] [2 Punkte]

Zeigen Sie für $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von Ω, dass

a) Falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$, dann konvergiert die Folge $A_1, A_2, \ldots$. Wogegen?

b) Falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$, dann konvergiert die Folge $A_1, A_2, \ldots$. Wogegen?

Aufgabe 12 [von Z erzeugte σ-Algebra] [4 Punkte]

Sei Z ein Teilmengensystem von Ω. Wir nennen dann $\sigma(Z)$ die von Z erzeugte σ-Algebra. Es ist dies die kleinste σ-Algebra, die Z beinhaltet. Zeigen Sie, dass eine derartige (eindeutige) σ-Algebra existiert, genauer: Zu jedem Teilmengensystem Z von Ω existiert eine eindeutige σ-Algebra $\sigma(Z)$ derart, dass

a) $Z \subseteq \sigma(Z)$

b) $\forall$ σ-Algebra U mit $Z \subseteq U$ gilt $\sigma(Z) \subseteq U$.

Aufgabe 13 [Vereinigung zweier σ-Algebren] [4 Punkte]

Von der Lösung von Aufgabe 12 wissen wir, dass Schnittmengen von σ-Algebren wieder σ-Algebren sind. Finden Sie ein Gegenbeispiel dass zeigt, dass Vereinigungen zweier σ-Algebren nicht zwingend σ-Algebren sein müssen. Geben Sie dazu $\Omega, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ an.

Honours

Aufgabe 14 [Urbild einer σ-Algebra] [3 Punkte]

Seien Ω_1, Ω_2 Ereignisräume und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf diesem Ereignisraum Ω_2. Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}_2\}$$

ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

3. März 2012

Aufgabe 7 [Ereignisraum]
Es folgen zu jedem der 6 Fälle von Ereignisräumen aus 1.1 ein Beispiel aus der "realen Welt", welches man "sinnvollerweise" mit dem jeweiligen Fall modelliert.

1) Endliche Mengen: Resultate beim Würfeln mit einem Würfel:

{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}.

2) Abzählbare Mengen: Die Anzahl Lebewesen, die zu einem Zeitpunkt auf der Erde leben: $\mathbb{N}$. (Eigentlich ist das nur ein Modell, da diese Zahl sowieso nach oben beschränkt ist.)

3) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Lebensdauer einer Glühbirne.

4) Endliche kartesische Produkte: Resultate beim Würfeln mit n (unterscheidbaren) Würfeln:

{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}^{n}.

5) Unendliche kartesische Produkte: Unendlicher Würfelwurf:

{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}$^\infty$.

6) Funktionen: Aktienkurse.

Aufgabe 8 [Ist Potenzmenge eine σ-Algebra?]
Behauptung: Die Potenzmenge einer Menge Ω ist eine σ-Algebra über dieser Menge Ω.

Beweis: Die Potenzmenge enthält alle Teilmengen von Ω. Die drei Bedingungen von Definition 1.1 sind damit alle offenbar erfüllt.

■

Aufgabe 9 [lim sup und lim inf von Mengen]
Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Behauptung: Es gilt $\limsup A_n \supseteq \liminf A_n$.

Beweis: Sei $x \in \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n\geqslant k} A_n$. Dies bedeutet, dass es eine natürliche Zahl k_0 geben muss, so dass $x \in A_n$ für alle $n \geqslant k_0$.

Insbesondere folgt, dass für alle natürlichen Zahlen k gelten muss $x \in \bigcup_{n\geqslant k} A_n$, da zum Beispiel $A_{\max\{k_0,k\}} \subset \bigcup_{n\geqslant k} A_n$.

Wir schliessen $x \in \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n\geqslant k} A_n = \limsup A_n$. Dies beweist die Behauptung.

■

Bemerkung: Die umgekehrte Aussage, also $\limsup A_n \subseteq \liminf A_n$, ist im Allgemeinen falsch. Dies haben wir bereits in Aufgabe 23 der Vorlesung WTS eingesehen.

Aufgabe 10 [lim sup, lim inf]
Behauptung: Es gilt $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$.

Beweis: Mit Hilfe von den Gesetzen von De Morgan schliessen wir

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \left(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n\geqslant k} A_n\right)^c = \bigcup_{k=1}^\infty \left(\bigcup_{n\geqslant k} A_n\right)^c = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n\geqslant k} A_n^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c.$$

■

Aufgabe 11 [Konvergenz von monotonen Folgen von Ereignissen]
Es sei Ω eine Menge und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Ω.

a) **Behauptung:** Falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, dann konvergiert die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Menge A, wobei

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Beweis: Da $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, folgt sofort dass $A = \bigcup_{n\geqslant k} A_n$ für alle natürlichen Zahlen k. Wir schliessen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n\geqslant k} A_n \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty} A \;=\; A.$$

Wiederum aufgrund der Monotonie der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass für alle natürlichen Zahlen k gilt $\bigcap_{n\geqslant k} A_n = A_k$. Daraus folgt:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n\geqslant k} A_n \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; A.$$

Wir haben also gezeigt, dass gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \;=\; \liminf_{n\to\infty} A_n \;=\; A.$$

Nach der Definition auf Seite 4 oben im Skript, haben wir damit die Behauptung gezeigt.

■

b) **Behauptung:** Falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, dann konververgiert die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Menge A, wobei

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Beweis: Da die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend ist, ist die Folge $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich aufsteigend. Nach Teilaufgabe a) wissen wir damit, dass gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \;=\; \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \;=\; A^c,$$

wobei wir hier ein Gesetz von de Morgan verwendet haben.

Mit Hilfe von Aufgabe 10 schliessen wir daraus

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c \;=\; A^c$$

und damit $\limsup_{n\to\infty} A_n = A$.

Analog wie in Aufgabe 10 lässt sich mit Hilfe von den Gesetzen von De Morgan auch noch zeigen

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c \;=\; A^c,$$

woraus noch $\liminf_{n\to\infty} A_n = A$ folgt.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

■

Aufgabe 12 [von Z erzeugte σ-Algebra]
Es sei Z ein Teilmengensystem einer nicht-leeren Menge Ω.

Behauptung: Es gibt eine eindeutige σ-Algebra $\sigma(Z)$ über Ω, so dass gilt:

a) $Z \subseteq \sigma(Z)$

b) Für jede σ-Algebra U über Ω mit $Z \subseteq U$ gilt $\sigma(Z) \subseteq U$.

Beweis: Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller σ-Algebren U mit $Z \subseteq U$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ liegt klar in $\mathcal{I}$. Somit ist $\mathcal{I}$ sicher nicht leer. Wir können also sinnvoll definieren:

$$V = \bigcap\nolimits_{U \in \mathcal{I}} U.$$

Da für alle $U \in \mathcal{I}$ gilt $Z \subseteq U$ folgt sofort auch $Z \subseteq V$. Ausserdem ist V eine σ-Algebra, denn

- Die Menge Ω liegt in allen U aus $\mathcal{I}$, also auch in V.
- Falls A in V liegt, so liegt A in allen U aus $\mathcal{I}$. Da jedes U aus $\mathcal{I}$ eine σ-Algebra ist, liegt dann auch A^c in jedem von diesen U's. Dies bedeutet, dass dann A^c in V liegt.
- Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus V. Jedes Glied von dieser Folge liegt automatisch in jedem U aus $\mathcal{I}$. Folglich gilt
$$\bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n \in U,$$
für alle $U \in \mathcal{I}$. Demnach haben wir auch
$$\bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n \in V.$$

Damit erfüllt V die gefordeten Bedingungen, denn für jede andere σ-Algebra U mit $Z \subseteq U$ gilt per Definition $U \in \mathcal{I}$ und damit $V \subseteq U$.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Dazu seien V und W σ-Algebren mit den Eigenschaften a) und b). Da nach a) $Z \subseteq W$ folgt nach b) $V \subseteq W$. Analog folgt aus Symmetriegründen $W \subseteq V$ und damit $V = W$. Damit wäre auch die Eindeutigkeit gezeigt und wir können $\sigma(Z) = V$ setzen.

∎

Aufgabe 13 [Vereinigung zweier σ-Algebren]

Wir definieren $\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂\}$. Desweiteren definieren wir die folgenden zwei σ-Algebren von Ω

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\text{⚀}\}, \{\text{⚁}, \text{⚂}\}\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\text{⚁}\}, \{\text{⚀}, \text{⚂}\}\}.$$

Nun ist

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\text{⚀}\}, \{\text{⚁}\}, \{\text{⚁}, \text{⚂}\}, \{\text{⚀}, \text{⚂}\}\}$$

keine σ-Algebra, da z.B. $\{\text{⚀}, \text{⚁}\} = \{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\}$ nicht in $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ liegt.

Aufgabe 14 [Urbild einer σ-Algebra]

Seien Ω_1, Ω_2 Ereignisräume und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf Ω_2. Sei weiter $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung.

Behauptung: Das Teilmengensystem

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_2\}$$

von Ω_1 ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

Beweis:

- Es gilt $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$ und Ω_2 liegt in $\mathcal{A}_2$, da $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist. Also gilt $\Omega_1 \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.
- Sei $A \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$. Also gibt es ein $B \in \mathcal{A}_2$ mit $f^{-1}(B) = A$. Da $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist, folgt $B^c \in \mathcal{A}_2$.

  Für jedes Element $\omega \in A^c$ gilt $f(\omega) \in B^c$, da sonst $f(\omega) \in B$ und damit $\omega \in f^{-1}(B) = A$ gelten würde. Dies bedeutet $A^c \subseteq f^{-1}(B^c)$.

  Umgekehrt für ein Element $\omega \in f^{-1}(B^c)$ gilt $f(\omega) \in B^c$ und damit $\omega \notin f^{-1}(B) = A$, also $\omega \in A^c$. Dies zeigt $A^c \supseteq f^{-1}(B^c)$.

  Wir schliessen $A^c = f^{-1}(B^c)$ und damit $A^c \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.
- Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$. Es gibt für alle natürlichen Zahlen n ein $B_n \in \mathcal{A}_2$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$. Da nun $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist, folgt dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_2$. Weiter gilt
$$f^{-1}\left(\bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} A_n.$$
  Also liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.

Nach Definition 1.1 ist also $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ eine σ-Algebra von Ω_1.

∎