Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 3 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 10, Abgabe der Lösungen: Woche 11 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 12

Must

Aufgabe 15 [elementare Eigenschaften von P]

Beweisen Sie Lemma 1.8.

Standard

Aufgabe 16 [Konvergenz von Mengen und Stetigkeit von P] [4 Punkte]

Angenommen, Sie definieren die Konvergenz von Mengen A_n gegen eine Menge A in der folgenden Weise: A_n konvergiert gegen $A := \{\omega | \exists N_\omega : \omega \in A_n \forall n \geq N_\omega\}$ (solch eine Menge A gibt es für jede Folge von Mengen!). Zu welcher Konvergenz ist diese Definition äquivalent? Geben Sie ein konkretes Beispiel an, welches zeigt, dass mit dieser Definition Satz 1.10 (Stetigkeit von P) nicht mehr stimmt.

Aufgabe 17 [Linearkombinationen von Wahrscheinlichkeiten] [4 Punkte]

Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeiten auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $0 \leq \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$P[A] := \alpha P_1[A] + (1-\alpha)P_2[A]$$

auch eine Wahrscheinlichkeit ist.

Aufgabe 18 [Straffheit (tightness) von P] [4 Punkte]

Sei P eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie: für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$P[K] > 1 - \epsilon.$$

Diese Eigenschaft nennt man Straffheit; sie ist zentral wichtig in der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie (sog. Satz von Prohorov).

Übungsblatt 3 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

4. März 2012

Aufgabe 15 [elementare Eigenschaften von P]
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A und B Ereignisse aus $\mathcal{A}$. Weiter sei $(A_i)_{i=1}^n$ eine endliche Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{A}$ und sei $(B_i)_{i=1}^\infty$ eine unendliche Folge von Ereignissen aus $\mathcal{A}$.

Behauptung: Es gelten die folgenden Aussagen:

a) Für die leere Menge $\emptyset$ gilt $P[\emptyset] = 0$.

b) Es gilt

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n P[A_i]. \qquad \text{(endliche Additivität)}$$

Daraus folgt auch das "Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit": $P[A] = 1 - P[A^c]$.

c) Falls $A \subseteq B$, dann gilt $P[B] = P[A] + P[B \setminus A]$. Damit ist P insbesondere monoton in dem Sinne, dass aus $A \subseteq B$ folgt $P[A] \leqslant P[B]$.

d) Es gilt
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B].$$
Damit ist P sogenannt (endlich) subadditiv: $P[A \cup B] \leqslant P[A] + P[B]$.

e) Es gilt

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^\infty B_i] \leqslant \sum_{i=1}^\infty P[B_i]. \qquad \text{(Boolsche Ungleichung; subadditiv)}$$

Beweis:

a) Die Folge $(C_i)_{i=1}^\infty$, mit $C_i = \emptyset$ für alle i, ist klar paarweise disjunkt. Somit folgt mit Definition 1.7 c)

$$P[\emptyset] = P[\textstyle\bigcup_{i=1}^\infty C_i] = \sum_{i=1}^\infty P[C_i] = \sum_{i=1}^\infty P[\emptyset].$$

Dies kann nur funktionieren, wenn $P[\emptyset] = 0$. Denn andernfalls, d.h. wenn $P[\emptyset] > 0$ würde auf der rechten Seite unendlich herauskommen und $P[\emptyset] = \infty$ ist nicht erlaubt.

b) Für jede natürliche Zahl i mit $i > n$ definiere $A_i = \emptyset$. Da nun die (unendliche) Folge $(A_i)_{i=1}^\infty$ paarweise disjunkt ist, folgt mit Definition 1.7 c)

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i] = P[\bigcup_{i=1}^\infty A_i] = \sum_{i=1}^\infty P[A_i] = \sum_{i=1}^n P[A_i] + \sum_{i=n+1}^\infty P[\emptyset] = \sum_{i=1}^n P[A_i],$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen die Aussage aus Teil a) verwendet haben.

Das Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit folgt sofort, da $A \,\dot\cup\, A^c = \Omega$ und $P[\Omega] = 1$.

c) Falls $A \subseteq B$ können wir schreiben $B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A)$ (klar disjunkt). Es folgt sofort mit Teil b):

$$P[B] = P[A \,\dot\cup\, (B \setminus A)] = P[A] + P[B \setminus A].$$

d) Es gilt offenbar $A \subseteq A \cup B$ und $B \cap A^c \subseteq B$. Daraus folgt mit Teil c)

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A] + P[(A \cup B) \setminus A] \;=\; P[A] + P[(A \cup B) \cap A^c] \;=\; P[A] + P[(A \cap A^c) \cup (B \cap A^c)] \\ &= P[A] + P[B \cap A^c] \;=\; P[A] + P[B] - P[B \setminus (B \cap A^c)]. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$B \setminus (B \cap A^c) \;=\; B \cap (B \cap A^c)^c \;=\; B \cap (B^c \cup A) \;=\; A \cap B,$$

womit die gesuchte Aussage folgt.

Mit Definition 1.7 a) folgt daraus sofort $P[A \cup B] \leqslant P[A] + P[B]$, da $P[A \cap B] \geqslant 0$.

e) Wir definieren eine neue Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ durch $D_1 = B_1$ und für $i > 1$:

$$D_i \;=\; B_i \cap (D_{i-1} \cup \cdots \cup D_1)^c.$$

Die Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ ist klar paarweise disjunkt und es gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Wir schliessen also mit Definition 1.7 c)

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i] = P[\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i] \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P[D_i].$$

Aufgrund der Konstruktion der Folge $(D_i)_{i=1}^{\infty}$ ist ausserdem klar, dass für alle i gilt $D_i \subseteq B_i$. Es folgt damit mit Teil c)

$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i] \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P[D_i] \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{\infty} P[B_i].$$

■

Aufgabe 16 [Konvergenz von Mengen und Stetigkeit von P]
Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass wir die Konvergenz einer Folge von Mengen wie folgt definieren: Die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Menge

$$A \;:=\; \{\omega \,|\, \text{es gibt } N_\omega \in \mathbb{N}, \text{so dass für alle } n \geqslant N_\omega \text{ gilt } \omega \in A_n\}.$$

Bemerkung: Wie man sehr leicht einsehen kann, gilt $A = \liminf_{n \to \infty} A_n$.

Nun wollen wir noch mit Hilfe eines Beispiels zeigen, dass mit dieser Definition von Konvergenz der Satz 1.10 (Stetigkeit von P) falsch ist. Sei dazu $\Omega = \{☺\}$ und

$$A_n = \begin{cases} \Omega = \{☺\}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \emptyset, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit obiger Definition von Konvergenz gilt nun klar $A = \emptyset$, da für n gerade $☺ \notin A_n$. Desweiteren muss aufgrund von Definition 1.7 und Aufgabe 15 (bzw. Lemma 1.8) gelten

$$P[A_n] \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also konvergiert die Folge $(P[A_n])_{n \in \mathbb{N}}$ nicht und damit kann die Gleichung $\lim_{n \to \infty} P[A_n] = P[A] = 0$ gar nicht stimmen.

Bemerkung: Die Definition $\Omega = \{☺\}$ war für dieses Beispiel natürlich nicht relevant. Aber da nach einem konkreten Beispiel gefragt war, haben wir hier auch Ω konkret angegeben.

Aufgabe 17 [Linearkombinationen von Wahrscheinlichkeiten]
Seien P_1 und P_2 zwei Wahrscheinlichkeiten auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und sei α eine reelle Zahl mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Behauptung: Die Funktion $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definiert durch $P[A] = \alpha P_1[A] + (1 - \alpha) P_2[A]$ definiert auch eine Wahrscheinlichkeit.

Beweis:

- Sei $A \in \mathcal{A}$. Nun ist nach Definition 1.7 a) und nach Voraussetzung $P_1[A], P_2[A], \alpha, 1-\alpha \geqslant 0$. Daraus folgt

$$P[A] = \alpha P_1[A] + (1-\alpha)P_2[A] \;\geqslant\; 0.$$

- Es gilt nach Definition 1.7 b)

$$P[\Omega] = \alpha P_1[\Omega] + (1-\alpha)P_2[\Omega] \;=\; \alpha + (1-\alpha) \;=\; 1.$$

- Es sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von disjunkten Mengen aus $\mathcal{A}$. Mit Definition 1.7 c) folgt nun

$$\begin{aligned} P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \alpha P_1[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] + (1-\alpha)P_2[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \;&=\; \alpha \sum_{i=1}^{\infty} P_1[A_i] + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{\infty} P_2[A_i] \\ = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha P_1[A_i] + (1-\alpha)P_2[A_i]) \;&=\; \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 18 [Straffheit (tightness) von P]
Sei P eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Behauptung: Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$P[K] > 1 - \varepsilon.$$

Beweis: Nach Satz 1.16 c) gilt $\lim_{t\to-\infty} F_P(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} F_P(t) = 1$, wobei $F_P(t) = P[(-\infty, t]]$.
Also gibt es sicher zwei reelle Zahlen $T_1 < T_2$, so dass

$$F_P(T_1) < \varepsilon/2 \text{ und } F_P(T_2) > 1 - \varepsilon/2.$$

Wir setzen nun $K = [T_1, T_2]$. Damit folgt mit Aufgabe 15 (bzw. Lemma 1.8)

$$P[K] = P[[T_1, T_2]] \;\geqslant\; F_P(T_2) - F_P(T_1) \;>\; 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 \;=\; 1 - \varepsilon.$$

Ausserdem ist K abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt.

■