Dr. Christoph Luchsinger

Übungsblatt 4 zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeit P

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 12, Abgabe der Lösungen: Woche 14 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Besprechung: Woche 15

Must

Aufgabe 19 [absolut stetige Wahrscheinlichkeiten]

Beweisen Sie Korollar 1.21

Aufgabe 20 [kleine Hängepartie Beweis Satz 1.19]

Zeigen Sie: wenn $P[C] = 1$, dann gilt für alle Borel-Mengen B: $P[B \cap C] = P[B]$.

Aufgabe 21 [kleine Hängepartie aus WTS]

Zeigen Sie: es existiert keine Uniform-Wahrscheinlichkeit auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$.

Standard

Aufgabe 22 [fast sicher, Nullmengen] [4 Punkte]

Sei $P[A_i] = 1$ für alle i, dann gilt auch

$$P[\cap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1.$$

Aufgabe 23 [bedingte Wahrscheinlichkeiten, false positive] [4 Punkte]

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, ohne Symptome, Brustkrebs hat, ist 1 %. Hat nun eine dieser Frauen in der Tat Brustkrebs, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Mammographiebefundes 80 % (positiv heisst hier, dass der medizinische Apparat Brustkrebs anzeigt). Falls eine dieser Frauen in der Tat keinen Brustkrebs hat, so ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes 10 %. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positivem Befund tatsächlich Brustkrebs hat? [Zahlen sind zur Zeit (2006) etwa realistisch]

Aufgabe 24 [bedingte Wahrscheinlichkeiten] [4 Punkte]

Sei P die uniforme Verteilung auf einem endlichen Ω. Sei A eine Teilmenge von Ω. Zeigen Sie: $P[\ .\ |A]$ ist eine uniforme Verteilung auf A.

Honours

Aufgabe 25 [Ein- und Ausschlussprinzip] [4 Punkte]

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $B_J := \cap_{j \in J} A_j$. Für $k \geq 1$ definieren wir $S_k := \sum_{|J|=k} P[B_J]$. Dann gilt das sogenannte "Ein- und Ausschlussprinzip":

$$P[\cup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k.$$

Schreiben Sie noch die beiden Formeln für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ explizit auf und machen Sie anschauliche Diagramme dazu, welche die Formel illustrieren. Beweisen Sie das "Ein- und Ausschlussprinzip".

Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Olivier Warin

4. März 2012

Aufgabe 19 [absolut stetige Wahrscheinlichkeiten]
Behauptung: Eine Wahrscheinlichkeit P auf $\mathbb{R}$ ist genau dann absolut stetig, wenn es eine nicht-negative Funktion f_P (Dichte von P) auf $\mathbb{R}$ gibt mit $\int_{-\infty}^{\infty} f_P(s)ds = 1$, so dass

$$F_P(t) = \int_{-\infty}^{t} f_P(s)ds$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Nehmen wir zunächst an, dass wir eine absolut stetige Wahrscheinlichkeit P auf $\mathbb{R}$ haben. Laut Definition 1.20 gibt es daher eine nicht-negative (und integrierbare) Funktion $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle reelle Zahlen $a < b$ gilt $P[(a,b]] = \int_a^b f_P(s)ds$. Aus Aufgabe 18 können wir schliessen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl a_ε gibt, so dass

$$1 - \varepsilon \leqslant P[(-a_\varepsilon, a_\varepsilon]] \;=\; \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} f_P(s)ds \;\leqslant\; \int_{-\infty}^{\infty} f_P(s)ds.$$

Die rechte Seite hängt nicht von ε ab, daher folgt mit $\varepsilon \to 0$: $\int_{-\infty}^{\infty} f_P(s)ds \geqslant 1$. Andererseits gilt für alle positiven reellen Zahlen a

$$1 = P[\mathbb{R}] \;\geqslant\; P[(-a,a]] \;=\; \int_{-a}^{a} f_P(s)ds,$$

und damit auch $\int_{-\infty}^{\infty} f_P(s)ds \leqslant 1$. Wir schliessen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_P(s) = 1.$$

Analog können wir einsehen, dass gilt

$$F_P(t) = P[(-\infty, t]] \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_P(s)ds.$$

Nun nehmen wir umgekehrt an, dass es eine nicht-negative Funktion f_P auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f_P(s)ds = 1$ gibt, so dass $F_P(t) = \int_{-\infty}^{t} f_P(s)ds$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Ähnlich wie in Aufgabe 18, können wir schliessen

$$P[(a,b]] = F_P(b) - F_P(a) \;=\; \int_{-\infty}^{b} f_P(s)ds - \int_{-\infty}^{a} f_P(s)ds \;=\; \int_{a}^{b} f_P(s)ds,$$

also ist P gemäss Definition 1.20 absolut stetig.

■

Aufgabe 20 [kleine Hängepartie Beweis Satz 1.19]
Sei P eine Wahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sei weiter C eine Borel-Menge mit $P[C] = 1$ und B eine beliebige Borel-Menge.

Behauptung: Dann gilt $P[B] \;=\; P[B \cap C]$.

Beweis: Da $C \subseteq B \cup C$ folgt sofort mit Lemma 1.8 c) $P[B \cup C] \geqslant P[C] = 1$, also $P[B \cup C] = 1$. Wir schliessen mit Lemma 1.8 d)

$$1 = P[B \cup C] \;=\; P[B] + P[C] - P[B \cap C] \;=\; P[B] + 1 - P[B \cap C].$$

Daraus folgt $P[B] = P[B \cap C]$, wie behauptet.

■

Aufgabe 21 [kleine Hängepartie aus WTS]
Behauptung: Es gibt keine Uniform-Wahrscheinlichkeit auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$.

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe eine solche Uniformwahrscheinlichkeit P auf $\mathbb{N}_0$. Dies bedeutet, dass es ein $p \in [0, 1]$ geben muss mit $P[\{n\}] = p$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nun können wir aber $\mathbb{N}_0$ wie folgt als disjunkte abzählbare Vereinigung schreiben:

$$\mathbb{N}_0 = \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} \{n\}.$$

Mit Definition 1.7 b) und c) folgt damit

$$1 = P[\mathbb{N}_0] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} p \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } p = 0 \\ \infty, & \text{falls } p > 0. \end{cases}$$

Dies ist ein Widerspruch, also kann ein kein solches P geben.

■

Aufgabe 22 [fast sicher, Nullmengen]
Es sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine folge von Ereignissen mit $P[A_i] = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Dann gilt $P[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1$.

Beweis: Mit Lemma 1.8 und den Gesetzen von de Morgan schliessen wir

$$\begin{aligned} P[\textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1 - P[\big(\textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big)^c] \;&=\; 1 - P[\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c] \;\geqslant\; 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P[A_i^c] \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (1 - P[A_i]) \;=\; 1 \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.

■

Aufgabe 23 [bedingte Wahrscheinlichkeiten, false positive]
Wir definieren die folgenden zwei Ereignisse:

$K = \{$"Frauen zwischen 40 und 50 Jahren, ohne Symptome, die Brustkrebs haben"$\}$
$T = \{$"Frauen zwischen 40 und 50 Jahren, ohne Symptome, mit positivem Mammographiebefund"$\}$.

Aus dem Aufgabentext erhalten wir (unter Anderem) die folgende Informationen.

$$P[K] = 1\%, \; P[T|K] = 80\%, \; P[T|K^c] = 10\%.$$

In dieser Formalisierung, ist nun $P[K|T]$ gesucht. Um diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, verwenden wir die Formel von Bayes (siehe Seite 26 im Skript) und das Prinzip der Gegenwahrscheinlichkeit (für $P[K^c]$):

$$P[K|T] = \frac{P[T|K]P[K]}{P[T|K]P[K] + P[T|K^c]P[K^c]} \;=\; \frac{P[T|K]P[K]}{P[T|K]P[K] + P[T|K^c](1 - P[K])} \;\doteq\; 7.476636\%.$$

Aufgabe 24 [bedingte Wahrscheinlichkeiten]
Sei P die uniforme Verteilung auf $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, d.h. $P[\{\omega_i\}] = 1/n$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Weiter sei A eine nicht-leere Teilmenge von Ω mit m Elementen und damit also $P[A] = m/n$.

Behauptung: Die Wahrscheinlichkeit $P[\cdot|A]$ ist die uniforme Verteilung auf A.

Beweis: Es sei $a \in A$. Wir müssen nun zeigen, dass $P[\{a\}|A] = 1/m$ gilt. Da P auf Ω die uniforme Verteilung ist gilt aufgrund von Definition 1.22:

$$P[\{a\}|A] = \frac{P[\{a\} \cap A]}{P[A]} = \frac{P[\{a\}]}{P[A]} = \frac{1/n}{m/n} = \frac{1}{m}.$$

Wir haben dabei beim zweiten Gleichheitszeichen benutzt, dass $a \in A$ und damit $\{a\} \cap A = \{a\}$.

■

Aufgabe 25 [Ein- und Ausschlussprinzip]
Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse und für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $B_J = \bigcap_{j \in J} A_j$. Weiter definieren wir für eine natürliche Zahl k $S_k = \sum_{|J|=k} P[B_J]$.

Behauptung: Es gilt das sogenannte "Ein- und Ausschlussprinzip":

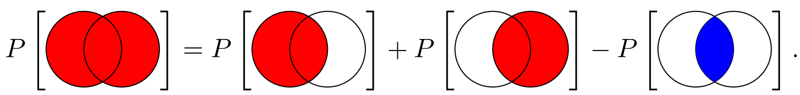
$$P[\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k.$$

Bevor wir diese Behauptung beweisen, schreiben wir diese Formel noch für $n = 2$ und $n = 3$ einmal explizit auf und illustrieren diese mit Hilfe von entsprechenden Venn-Diagrammen.

Für $n = 2$ erhalten wir die folgende Formel:

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2],$$

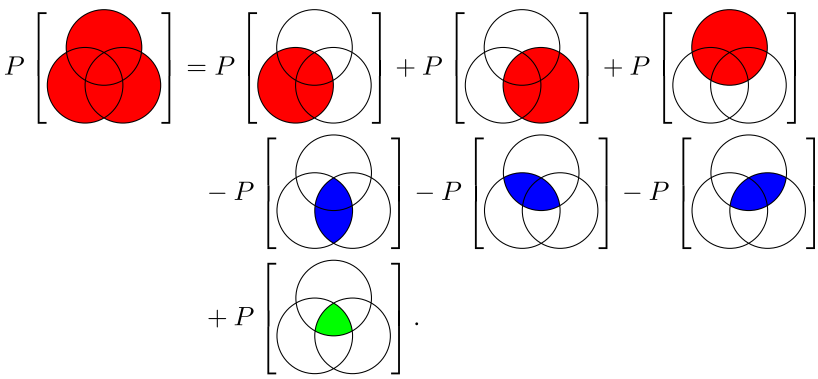
also genau die Formel aus Lemma 1.8 d). Das Folgende beschreibt diese Formel mit Skizzen.



Für $n = 3$ erhalten wir die folgende Formel:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] - P[A_1 \cap A_2] - P[A_1 \cap A_3] - P[A_2 \cap A_3] + P[A_1 \cap A_2 \cap A_3].$$

Dies kann wie folgt mit Skizzen beschrieben werden:



Kommen wir nun noch zum Beweis der Behauptung:

Beweis (der Behauptung): Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Wir können also annehmen, dass $n > 1$ und dass die Behauptung für $n - 1$ statt n bewiesen ist.

Wir beginnen nun auf der rechten Seite der Gleichung.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{|J|=k} P[B_J] &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k \\ n \in J}} P[B_J] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k \\ n \notin J}} P[B_J] \\
&= P[A_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k-1 \\ n \notin J}} P[A_n \cap B_J] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k \\ n \notin J}} P[B_J] \\
&= P[A_n] - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k \\ n \notin J}} P[\textstyle\bigcap_{j \in J} (A_n \cap A_j)] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{|J|=k \\ n \notin J}} P[B_J].
\end{aligned}$$

Damit folgt aufgrund der Induktionsannahme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k = P[A_n] - P[\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_n \cap A_i)] + P[\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i] \; = \; P[A_n] + P[\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i] - P[A_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i].$$

Wir schliessen mit Lemma 1.8 d)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k = P[A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i] \; = \; P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i].$$

■